Prova 2 – Introdução à Teoria dos Números – 2008

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Considere a função de von Mangoldt dada por $\Lambda(n) = \log p$, se n é uma potência de p, e $\Lambda(n) = 0$, caso contrário. Prove que $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$.

2. Considere a função de Liouville dada por $\lambda(1) = 1$ e $\lambda(n) = (-1)^{e_1+\cdots+e_r}$, se $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$. Seja $L(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$.

(a) Prove que λ é completamente multiplicativa.

(b) Prove que $L(n) = 1$, se n é um quadrado, e $L(n) = 0$, caso contrário.

(c) Prove que $\lambda(n) = \sum_{d^2|n} \mu\left(\frac{n}{d^2}\right)$.

(d) Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$, para $s > 1$.

3. Prove que

$$\log\lfloor x \rfloor! = x \log x - x + O(\log x).$$

Conclua que

$$\log(n!) \sim n \log n.$$

4. Conclua do Teorema dos Números Primos que

$$\pi(\alpha x) \sim \alpha\pi(x),$$

para todo $\alpha > 0$.

5. Prove que se $n \geq 2$, então existe um primo p tal que $p \mid n!$ mas $p^2 \nmid n!$.

6. Prove que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

nunca é um inteiro, se $n \geq m > 1$.