Prova 1 – Introdução à Teoria dos Números – 2008

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Encontre todas as soluções da equação diofantina $20x + 8y = 2008$.

2. Prove que $5n^7 + 7n^5$ é múltiplo de 12 para todo inteiro n.

3. Expresse $\varphi(2n)$ em função de $\varphi(n)$.

4. Escreva $2005 = 5 \cdot 401$ e $2009 = 7^2 \cdot 41$ como soma de dois quadrados. É possível fazer isso para $2008 = 8 \cdot 251$?

5. Prove que se p é um primo ímpar e g é uma raiz primitiva mod p, então $-g$ é uma raiz primitiva mod p se e somente se $p \equiv 1 \bmod 4$.

6. Prove que se p é um primo da forma $2q + 1$ com q primo e $q \equiv 1 \bmod 4$, então 2 é uma raiz primitiva mod p.

7. Prove que -3 é resíduo quadrático mod p se e somente se $p \equiv 1 \bmod 6$. Conclua que existem infinitos primos da forma $6k + 1$.

8. Prove que a equação $(x^2 + 1)(x^4 - 4) = 0$ tem solução mod p para todo primo p, mas não tem solução inteira.

[Dica: $(-1|p) = 1 \iff p \equiv 1 \bmod 4$. $(2|p) = 1 \iff p \equiv \pm 1 \bmod 8$.]