Quarta Lista

Int. a Teoria dos Números

1. Seja $\mathbb{Z}[i]$ o anel dos inteiros de Gauss.
   (a) Prove que se p é primo da forma $4k+3$ então p é irredutível nesse anel. (Dica: Se $a|p$ então $N(a)|N(p)$).
   (b) Prove que se $x+iy$ é tal que $x^2+y^2=q$ com q primo da forma $4k+1$ então $x+iy$ é irredutível
2. Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que $n^2+1|n!$.
3. Mostre que para qualquer inteiro positivo k, $x^2-(k^2-1)y^2=-1$ não tem solução nos inteiros.
4. Mostre que se $p \equiv 1 \pmod 4$ primo, então a equação $x^2-py^2=-1$ tem solução.
5. Encontre todos os números naturias n tais que $n+1$ e $3n+1$ são simultaneamente quadrados perfeitos.
6. Determine todos os pares de inteiros positivos (x,y) satizfazendo $(x+y)^2-2(xy)^2=1$.