Terceira Lista

Int. a Teoria dos Números

1. Se p é um primo maior que 3, então qualquer divisor primo do número $\dfrac{2^p+1}{3}$ é da forma $2kp+1$, onde k é um número natural.
2. Prove que todos os divisores dos números de Fermat $2^{2^n}+1$, $n>1$, são da forma $2^{n+2}k+1$.
3. Dado um inteiro positivo n, prove que a seqüência $a, a^a, a^{a^a}, \ldots$ se torna eventualmente constante, módulo n.
4. Prove que se p é um primo maior que 3 então a soma dos resíduos quadráticos módulo p é divisível por p.
5. Mostre que se a é um resíduo quadrático módulo m, e $ab \equiv 1 \pmod{m}$, então b é também um resíduo quadrático. Prove que o produto dos resíduos quadráticos módulo p é congruente a $+1$ ou -1 módulo p.
6. Prove que existem uma infinidade de primos da forma $4k+1$.
7. Mostre que p é um divisor de ambos os números da forma m^2+1, n^2+2, se e somente se é um divisor de algum número da forma k^4+1.
8. Ache todos os inteiros n tais que vale $a^{n+1} \cong a \pmod{n}$ para todo a inteiro.
9. Seja p um primo da forma $4k+1$. Prove que k é resíduo quadrático $\pmod{p}$ e calcule $k^k \pmod{p}$.