Segunda Lista

Int. a Teoria dos Números

1. Qual o último dígito de 777^{777}?
2. Mostre que existe algum múltiplo de 21 que tem 241 com seus três último dígitos.
3. Sejam m e n números naturais tais que $mn + 1$ é múltiplo de 24. Prove que $m + n$ é multiplo de 24.
4. Prove que $x^2 - 7y = 10$ não possui solução inteira.
5. Escreva uma única congruência que é equivalente aos seguintes conjuntos de congruências:
   (a) $x \equiv 1 \pmod 4$ e $x \equiv 2 \pmod 3$.
   (b) $x \equiv 3 \pmod{10}$ e $x \equiv 5 \pmod{21}$.
   (c) $x \equiv 4 \pmod{14}$ e $x \equiv 10 \pmod{31}$
6. Mostre que se n divide um único número de Fibonacci então ele dividirá uma infinidade.
7. Seja n um inteiro positivo. Prove que n é primo se e somente se
   $$\binom{n-1}{k} \equiv (-1)^k (mod\ n)$$
   Para todo $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.
8. Prove que que se p é primo, então $p^p - 1$ tem um fator primo congruente a 1 módulo p
9. Seja g uma raiz primitiva $\pmod p$ satisfazendo $g^2 \equiv g + 1 \pmod p$. Prove que
   (a) $g - 1$ também é uma raiz primitiva $\pmod p$.
   (b) Se $p = 4k + 3$, então $g - 2$ também é uma raiz primitiva $\pmod p$.
10. Sejam n e k inteiros positivos, tais que se n é par então k é par. Prove que existem inteiros (possivelmente negativos) a e b satisfazendo
    $$\mathrm{mdc}(a, n) = \mathrm{mdc}(b, n) = 1 \quad \text{e} \quad k = a + b$$