Uma Prova do Teorema de Bochner

Reinier Díaz Millán

29 de novembro de 2010

Índice

1. Introdução

Este trabalho versa sobre o problema da caracterização dos polinômios ortogonais clássicos que são habitualmente enumerados como os polinômios de Hermite, Laguerre, e Jacobi. Uma sucessão de polinômios ortogonais diz-se clássica, se cada um de seus termos é um vetor próprio do operador de Sturm-Liouville de segunda ordem: $L[y(x)] = \alpha(x)y''(x)+ \beta(x)y'(x) = \lambda_n y(x)$, onde $\alpha(x) = ax^2+bx+c$, não sempre null, $\beta(x) = dx+c$ e $\lambda_n = an(n-1)+dn$. Em 1929, Bochner [1] classificou todos os polinômios ortogonais que satisfazem essa condição; a prova de Bochner baseia-se em encontrar quais são os polinômios $\alpha(x)$ e $\beta(x)$. Em 1935, Hahn [4] demonstrou, o que depois foi provado como uma condição equivalente, que os polinômios ortogonais clássicos são aqueles que satisfazem que a sucessão de derivados também formam um sistema de polinômios ortogonais . Dois anos mais tarde, em 1937, Hahn [7] generaliza esse resultado, e demonstra que os polinômios ortogonais cujas derivadas de ordem maior que um, são também ortogonais, são os clássicos.

No presente trabalho todos os polinômios são reais de uma variável real, usamos $gr\phi$ para denotar o grau do polinômio $\phi(x)$ e assumamos o $gr0 = -1$. Um conjunto de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é um sistema de polinômios se $grP_n = n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ .Chamaremos a qualquer funcional linear no espaço dos polinômios, funcional de momento. Denotaremos a ação do funcional de momento σ sobre o polinômio $\phi(x)$ por $\langle\sigma, \phi\rangle$ e chamaremos $\{\sigma_n\}_0^{\infty} = \{\langle\sigma, x^n\rangle\}_0^{\infty}$ a sucessão de momentos de σ. Para o funcional σ definiremos sua derivada e a multiplicação por un polinômio do seguinte jeito :

$$\langle\sigma^{'}, \phi(x)\rangle = -\langle\sigma, \phi^{'}(x)\rangle \tag{1}$$

e

$$\langle\varphi(x)\sigma, \phi(x)\rangle = \langle\sigma, \varphi(x)\phi(x)\rangle \tag{2}$$

para quaisquer polinômios $\varphi(x)$ e $\phi(x)$.

Definição 1 *O conjunto de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é um sistema de polinômios ortogonais fracos (SPOF) (respectivamente um sistema de polinômios ortogonais (SPO)) se existe um funcional σ tal que:*

$$\langle\sigma, P_mP_n\rangle = K_{nm}\delta_{nm}, m, n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

onde K_{nm} é um número real (respectivamente não nulo). Se isso acontece então, chamaremos a σ funcional de peso para $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ que serão (POF) ou (PO) com relação a σ.

O funcional de momentos σ (ou sua sucessão de momentos $\{\sigma_n\}_0^{\infty}$) é chamado semi-definido (respectivamente definido-positivo) se

$$\triangle_n = \triangle_n(\sigma) := det[\sigma_{i+j}]_{i,j=0}^{n} \neq 0 (resp. > 0), \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

É conhecido ([3]) que um funcional de momentos σ tem um SPOF (respectivamente um SPO) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ com relação a ele se, e somente se, σ é semi-definido (respectivamente semi-definido positivo). Por outra parte, pelo teorema clássico de Boas [2] do problema de momentos, para qualquer SPOF $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ com relação a σ existe uma função $\mu(x)$ de variação limitada em $\mathbb{R}^1$ tal que:

$$\begin{aligned} \langle \sigma, P \rangle &= \int P d\mu \\ \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) P_n(x) d\mu(x) &= K_{nm}\delta_{nm}, \qquad m, n = 0, 1, 2, ... \end{aligned} \tag{5}$$

Se existe uma função $\mu(x)$ em $\mathbb{R}^1$ tal que $d\mu(x) = w(x)dx$, então chamaremos por $w(x)$ a função de peso para os SPOF $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Neste trabalho vamos ficar interessado só no caso da definição clássica, que todo sistema de polinômios tem associado uma função de peso, e veremos agora como uma função de peso, genera um solo sistema de polinômios ortogonais a menos de uma mudança de variável linear.

Seja $p(x)$ uma função de peso no intevalo (a, b) finito ou não, isso quer dizer que, $\forall f(x)$ polinômio real, temos,

$$\int_a^b f(x)p(x)dx < \infty$$

Consideremos a sequência de momentos $\mu_i = \int_a^b x^i p(x)dx = \langle \sigma, x^i p(x) \rangle$, então definamos sistema de polinômios $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ como,

$$P_n(x) = det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \cdots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{bmatrix} \tag{6}$$

então,

$$\int_a^b x^k P_n(x)dx = \int_a^b det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \cdots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \\ x^k & x^{k+1} & x^{k+2} & \cdots & x^{k+n} \end{bmatrix} dx \tag{7}$$

$$\int_a^b x^k P_n(x)dx = det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \cdots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \mu_{k+2} & \cdots & \mu_{k+n} \end{bmatrix} dx \tag{8}$$

O qual é zero para todo $k < n$, isso classifica totalmente o polinônio $P_n(x)$. Portanto, se temos uma função de peso definida, também temos a sua sequência de polinômios associada.

A seguir veremos algumas das propriedades mais importantes dos polinômios ortogonais.

Observação 1 *Qualquer sistema de polinômios em $\mathbb{R}$, formam uma base no espaço dos polinômios.*

Provar essa observação não é complexo, pois cada um dois polinômios tem grau diferente, e portanto a independência linear é facilmente encontrada, resolvendo um sistema de equações lineares homogêneo. Dessa propiedade temos que para cada polinômio $\phi(x)$ de grau k, existem constantes reais $\{c_i\}_{i=0}^{k}$ tais que,

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i P_i(x) \Rightarrow \langle \sigma, P_n(x)\phi(x) \rangle = 0, \quad \forall n > k. \tag{9}$$

Um dos resultados mais importante na teoria dos polinômios ortogonais, é que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos, a qual é muito útil na solução de vários problemas.

Teorema 1 ***(Relação de Recorrência de Três Termos)***
Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais, então

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{10}$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1} = 0$, $\gamma_{n+1}, \beta_{n+1}, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$, e $\gamma_{n+1} \neq 0$, $\alpha_{n+1} \neq 0 \quad n \geq 0$.

Demonstração Seja $A_n \in \mathbb{R}$ tal que $P_n(x) - A_n x P_{n-1} = \pi_{n-1}(x)$ onde $gr(\pi_{n-1}) \leq n-1$, então temos,

$$P_n(x) - A_n x P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k(x).$$

Pela ortogonalidade vemos que $\lambda_k = 0$, $\forall k \leq n-3$, pelo que temos (10).
■

Agora vamos ver quais são os polinômino de Jacobi, Laguerre e Hermite, os quais serão o objetivo principal deste trabalho. A função $p(x)$, irá denotar a função de peso.

Função de peso

- Polinôminos ortogonais de Jacobi

  $p(x) = (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ onde $\alpha, \beta > 0$, definidos em $(0,1)$. Nota-se que, pela mudança de variável $x = \frac{2}{a-b}y - \frac{a+b}{a-b}$, resulta $p(y) = \frac{4}{(b-a)^2}(y - a)^{\beta-1}(b-y)^{\alpha-1}$, onde agora a função de peso está definida no intervalo finito (a,b), pelo qual os polinômios também são definidos em (a,b).

- Polinômios ortogonais de Laguerre

  $p(x) = e^{-x}x^{\alpha}$, onde $\alpha > -1$, os quais estão definidos no intervalo real $(0, \infty)$.

- Polinômios ortogonais de Hermite

  $p(x) = e^{-x^2}$, que estão definidos em todo $\mathbb{R}$, e são os únicos com essa propriedade.

O principal objetivo desse trabalho é mostrar o siguiente resultado:

Teorema 2 *Os únicos sistemas de polinômios ortogonais que são vetores proprios do operador diferencial de Sturm-Liouville,*

$$L[y(x)] = \alpha(x)y^{''}(x) + \beta(x)y^{'}(x) = \lambda_n y(x) \tag{11}$$

são os polinômios ortogonais clásicos, que são polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite.

2. Teorema de Classificação

Vamos agora ver um lema que vai nos ajudar na prova do teorema de classificação, o qual nos dá a equivalência entre os resultados de Hahn e Bochner.

Lema 1 *Seja* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *um SPO com relação a* σ *e* τ *um funcional de momento. Então*

(i) $(\phi(x)\tau)^{'} = \phi^{'}(x)\tau + \phi(x)\tau^{'}$ *para qualquer polinômio* $\phi(x)$.

(ii) $\langle\tau, P_n(x)\rangle = 0$ *para todo* $n > k$, $k \geq 0$ *um inteiro se, e somente se, existe um polinômio* $\phi(x)$ *de grau* $\leq k$ *tal que* $\tau = \phi(x)\sigma$.

Demonstração

(i) Para qualquer polinômio $\psi(x)$ temos

$$\langle(\phi\tau)^{'}, \psi\rangle = -\langle\tau, \psi^{'}\phi\rangle = -\langle\tau, (\phi\psi)^{'} - \phi^{'}\psi\rangle = \langle\tau^{'}, \phi\psi\rangle + \langle\phi^{'}\tau, \psi\rangle = \langle(\phi\tau^{'} + \phi^{'}\tau), \psi\rangle$$

Assim fica demonstrado (i).

(ii) Seja $k \geq 0$ um inteiro e assumamos que $\langle\tau, P_n(x)\rangle = 0$ para todo $n > k$. Consideremos o funcional $\tilde{\tau} = (\sum_{j=0}^{k} c_j P_j(x))\sigma$, onde os c_j são constantes. Então $\langle\tilde{\tau}, P_n(x)\rangle = 0$ para $n > k$, portanto $\tau = \tilde{\tau}$ se, e somente se $\langle\tau, P_n(x)\rangle = \langle\tilde{\tau}, P_n(x)\rangle$ para $0 \leq n \leq k$. Como $\langle\tilde{\tau}, P_n(x)\rangle = \sum_{j=0}^{k} c_j\langle\sigma, P_j(x)P_n(x)\rangle = c_n\langle\sigma, P_n^2\rangle$, temos $\tau = (\sum_{j=0}^{k} c_j P_j(x))\sigma$, com $c_j = \langle\tau, P_j(x)\rangle/\langle\sigma, P_j^2(x)\rangle = \langle\tau, P_j(x)\rangle/K_{jj}$, $0 \leq j \leq n$. O inverso sai da ortogonalidade dos $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ com relação a σ e do fato que se $\deg\phi(x) \leq k$ então $\phi(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j P_j(x)$, para constantes c_j.

■

Teorema 3 ***(Classificação)*** *Seja* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *um SPO, então as seguintes condicões são equivalentes:*

(a) Para cada $n = 0, 1, 2, ...$ *;* $P_n(x)$ *satisfaz*

$$L[P_n(x)] := \alpha(x)P_n^{''}(x) + \beta(x)P_n^{'}(x) = \lambda_n P_n(x) \tag{12}$$

onde $\alpha(x) = ax^2 + bx + c$, *não sempre null,* $\beta(x) = dx + e$ *com* $d \neq 0$, *e* $\lambda_n = an(n-1) + dn$.

(b) $\{P_{n+1}^{'}(x)\}_0^{\infty}$ *é um SPO.*

(c) $\{P_{n+1}^{'}(x)\}_0^{\infty}$ *é um SPOF.*

(d) O funcional de peso σ *para* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *satisfaz*

$$(\alpha(x)\sigma)^{'} = \beta(x)\sigma \tag{13}$$

para alguns polinômios $\alpha(x) = ax^2 + bx + c$ *não sempre null e* $\beta(x) = dx + e$, *com* $d \neq 0$.

Aqui a equação (13) quer dizer que ambos lados da equação são os mesmos como funcionais de momentos.

Demonstração

(a)$\Rightarrow$(d): Assumamos (a). Então para $n \geq 1$

$$\langle(\alpha(x)\sigma)' - \beta(x)\sigma, P_n'(x)\rangle = -\langle\sigma, \alpha(x)P_n'' + \beta(x)P_n'(x)\rangle = -\lambda_n\langle\sigma, P_n\rangle = 0$$

Portanto temos (d), pois $\{P_n'(x)\}_1^\infty$ é um sistema de polinômios.

(a)$\Rightarrow$(b): Assumamos (a). Como (a) $\Rightarrow$ (d) temos pelo Lema (1) (i) que

$$\lambda_n P_n\sigma = \alpha P_n''\sigma + \beta P_n'\sigma = (\alpha P_n'\sigma)' \tag{14}$$

Portanto

$$\langle\alpha\sigma, P_{m+1}'P_{n+1}'\rangle = -\langle(\alpha P_{n+1}'\sigma)', P_{m+1}\rangle = -\lambda_{n+1}\langle\sigma, P_{n+1}P_{m+1}\rangle$$

O que implica que $\{P_{n+1}'(x)\}_0^\infty$ é também um SPO con relação a $\alpha\sigma$, pois $\{P_n(x)\}_0^\infty$ é um SPO com relação a σ e $\lambda_n \neq 0$ para $n \geq 1$ quando $\{P_n\}_0^\infty$ satisfaz (a), pela relação (14).

(b)$\Rightarrow$(c): É trivial pela definição.

(c)$\Rightarrow$(d): Assumamos que $\{P_{n+1}'(x)\}_0^\infty$ é um SPOF com relação a τ, isto é,

$$\langle\tau, P_n'P_m'\rangle = 0 \quad \textit{para} \;\; m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots . \tag{15}$$

Faça $m = 1$ em (15). Então $\langle\tau, P_1'P_n'\rangle = -P_1'\langle\tau', P_n\rangle = 0$ para $n > 1$. Portanto pelo Lema (1)(ii) $\tau' = \beta(x)\sigma$ para algum polinômio $\beta(x)$ de grau ≤ 1. Faça agora $m = 2$ em (15). Então para $n > 2$

$$0 = \langle\tau, P_2'P_n'\rangle = -\langle(P_2'\tau)', P_n\rangle = -P_2''\langle\tau, P_n\rangle - \langle\tau', P_2'P_n\rangle = -P_2{''}\langle\tau, P_n\rangle - \langle\sigma, \beta P_2'P_n\rangle$$

Como $\langle\sigma, \beta P_2'P_n\rangle = 0$ para $n > 2$, então $\langle\tau, P_n\rangle = 0$ para $n > 2$, portanto pelo Lema (1) (ii) $\tau = \alpha(x)\sigma$ para algum polinômio $\alpha(x)$ de grau ≤ 2. Finalmente $\alpha(x)$ não é null, pois τ não é.

(d)$\Rightarrow$(a): Assumamos (d). Então $\{P_{n+1}'\}_0^\infty$ é um SPOF com relação a $\alpha\sigma$ pois

$$\langle\alpha\sigma, P_m'P_n'\rangle = -\langle(P_m'\alpha\sigma)', P_n\rangle = -\langle P_m''\alpha\sigma + P_m'(\alpha\sigma)', P_n\rangle$$

$$= -\langle\sigma, (\alpha P_m'' + \beta P_m')P_n\rangle = 0, \quad \textit{para} \quad m < n, \quad \textit{pois} \;\; gr(\alpha P_m'' + \beta P_m') \leq m.$$

Por ser $\alpha P_n'' + \beta P_n'$ um polinômio de grau $\leq n$, existem constantes $\{c_j\}_0^n$ tais que

$$\alpha P_n'' + \beta P_n' = \sum_{j=0}^{n} c_j P_j(x).$$

Então para $0 \leq k \leq n-1$ temos

$$c_k\langle\sigma, P_k^2\rangle = \langle\sigma, P_k\sum_{j=0}^{n} c_j P_j\rangle = \langle\sigma, P_k(\alpha P_n'' + \beta P_n')\rangle$$

$$= \langle P_k\beta\sigma - (P_k\alpha\sigma)', P_n'\rangle = -\langle\alpha\sigma, P_k'P_n'\rangle = 0$$

Portanto $c_k = 0$ para $0 \leq k \leq n-1$. Pelo qual, $\alpha P_n'' + \beta P_n' = c_n P_n = \lambda_n P_n$, como queríamos. Assim fica demonstrado o teorema. ■

3. Polinômios ortogonais com derivadas ortogonais

3.1. Os polinômios ortogonais de Jacobi

Tem sido demonstrado por W. Hahn [4], que se as derivadas de um conjunto de polinômios ortogonais formam também um conjunto de polinômios ortogonais, então o conjunto original tem que ser os polinômios de Jacobi, Hermite ou Laguerre. Seu método consiste em mostrar que satisfazem uma equação diferencial do tipo

$$(a + bx + cx^2)\Phi_n^{''} + (d + ex)\Phi_n^{'} + \lambda_n \Phi_n = 0.$$

Aqui se propõe uma nova demonstração deste resultado, nosso enfoque começa com a resposta à pergunta: Que condicões na função de peso resultam de assumir que ambos conjuntos de polimômios $\{\Phi_n^{'}\}$ y $\{\Phi_n\}$ são ortogonais ?

Seja o cojunto de polinômios ortogonais $\{\Phi_n\}$ com relação à função de peso $p(x)$ no intervalo (a, b), isto é:

$$\int_a^b \Phi_m(x)\Phi_n(x)p(x)dx = 0, \qquad \int_a^b p(x)dx > 0, \qquad (m \neq n).$$

Doravante assumamos que o intervalo (a, b) é finito.

3.1.1. Relação entre as funções de peso

Seja o conjunto de polinômios $\{\Phi_n^{'}(x)\}$ ortogonais no intervalo (c, d) infinito ou não, com a função de peso $q(x)$, isto é,

$$\int_c^d \Phi_n^{'}(x)\Phi_m^{'}(x)q(x)dx = 0, \qquad \int_a^b q(x)dx > 0, \qquad (m \neq n).$$

Sem perda de generalidade suponhamos os polinômios originais mónicos, então $\{\Phi_n^{'}\}$ e $\{\Phi_n\}$ satisfazem as relações recorrentes,

$$\Phi_{n+2}(x) = (x - c_{n+2})\Phi_{n+1}(x) - \lambda_{n+2}\Phi_n(x),$$

$$\frac{1}{n+2}\Phi_{n+2}^{'}(x) = \frac{x - c_{n+2}^{'}}{n+1}\Phi_{n+1}^{'}(x) - \lambda_{n+2}^{'}\Phi_n^{'}(x),$$

$$(n \geq 0; c_n, c_n^{'}, \lambda_n, \lambda_n^{'} constantes).$$

Derivando ambos lados da primeira relação e eliminando o término que contem x, e com a segunda relação, temos

$$\Phi_{n+1}(x) = \frac{1}{n+2}\Phi_{n+2}^{'}(x) + c_{n+2}^{''}\Phi_{n+1}^{'}(x) + \lambda_{n+2}^{''}\Phi_n^{'}, \quad (c_n^{''}, \lambda_n^{''} ctes).$$

Lembrando que $\{\Phi_n^{'}(x)\}$ com a função de peso $q(x)$ é ortogonal com qualquer polinômio de grau $\leq n-2$, temos

$$\int_c^d \Phi_{n+1}(x)G_{n-2}(x)q(x)dx = 0, \tag{16}$$

onde $G_n(x)$ é um polinômio arbitrário de grau $\leq n$.

Lema 2 *Seja $Q(x)$ não negativo em (c,d), e tal que existem os números*

$$\beta_k = \int_c^d Q(x)x^k dx, \qquad (k = 0, 1, ...),$$

e para r inteiro positivo

$$\int_c^d Q(x)\Phi_n(x)G_{n-r-1}(x)dx = 0, \qquad (n = r+1, r+2, ...).$$

Então quase em qualquer lugar

$$Q(x) = \begin{cases} P_r(x)p(x) & \textit{em } (a,b), \\ 0 & \textit{em outro lugar} \end{cases}$$

onde $P_r(x)$ é um polinômio de grau $\leq r$.

Demonstração Considere a função

$$R(x) = (\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + ... + \mu_r x^r)p(x).$$

Determinemos os $\{\mu_i\}$ tais que

$$\int_a^b R(x)x^i dx = \int_c^d Q(x)x^i dx, \qquad (i = 0, 1, ..., r);$$

isto é que os μ_i satisfazem as equações

$$\begin{aligned} \alpha_0\mu_0 + \alpha_1\mu_1 + \cdots + \alpha_r\mu_r &= \beta_0 \\ \alpha_1\mu_0 + \alpha_2\mu_1 + \cdots + \alpha_{r+1}\mu_r &= \beta_1 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \\ \alpha_r\mu_0 + \alpha_{r+1}\mu_1 + \cdots + \alpha_{2r}\mu_r &= \beta_r \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_k = \int_a^b x^k p(x)dx.$$

Isto é sempre possível porque o determinante desse sistema é não null, pois, se fosse zero, então, existem $\{\mu_i\}_{i=0}^r$ não todos zeros, tal que são solução do sistema homogéneo, portanto, se tem:

$0 \leq j \leq r \Rightarrow \sum_{i=0}^r \mu_i \int_a^b x^{i+j}p(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^b x^j (\sum_{i=0}^r \mu_i x^i)p(x)dx = 0$, multiplicando por μ_j e sumando em j temos,

$$\int_a^b (\sum_{i=0}^r \mu_i x^i)^2 p(x)dx = 0$$

que é absurdo. Agora

$$0 = \int_a^b R(x)\Phi_{r+i}(x)dx = \int_c^d Q(x)\Phi_{r+i}(x)dx, \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

E então

$$\int_a^b R(x)x^i dx = \int_c^d Q(x)x^i dx, \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots).$$

Seja

$$f(x) = \begin{cases} Q(x) - R(x) & , \qquad x \in E_1 = (a,b) \bigcap (c,d) \\ -R(x) & , \qquad x \in E_2 = (a,b) \setminus (c,d) \\ Q(x) & , \qquad x \in E_3 = (c,d) \setminus (a,b) \end{cases}$$

Então

$$\int_{E_1+E_2+E_3} f(x)x^i dx = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots).$$

Se (c,d) é finito, $f(x)$ tem que ser zero quase em todo lugar, e o lema é verdadeiro. Mais ainda da definição de $f(x)$, nós concluimos que $R(x)$, portanto $p(x)$, são $\equiv 0$ quase em todo lugar de E_3, assim que ambos intervalos (a,b) e (c,d) podem ser reduzidos à parte comum E_1; em outras palavras, aqui pode-se ter $(a,b) = (c,d)$. Se (c,d) é infinito, seja $A = \text{máx}(|a|,|b|)$, tal que $|x| \leq A$ em $E_1 + E_2$, o qual é igual com (a,b), e seja E_4 a parte de E_3 para a qual $|x| \geq (1+\alpha)A$, onde $\alpha > 0$ é arbitrário. Como $Q(x) \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} (1+\alpha)^i A^i \int_{E_4} Q(x)dx &\leq \int_{E_3} Q(x)x^i dx = \left| \int_{E_1+E_2} f(x)x^i dx \right| \\ &\leq A^i \int_{E_1+E_2} \big|f(x)\big| dx, \\ (1+\alpha)^i &\leq \frac{\int_{E_1+E_2} \big|f(x)\big| dx}{\int_{E_4} Q(x)dx} \end{aligned}$$

para todo i par, o que é impossível salvo $Q(x)$ seja zero quase em todo lugar de E_4. Portanto (c,d) é reduzido a $E_1 + E_3 - E_4$ e em (c,d), $|x| < (1+\alpha)A$; isto é, pela arbitrariedade de $\alpha(>0)$,

$$\text{em } (c,d), |x| \leq A = \text{máx}(|a|,|b|),$$

o que precisa que (c,d) seja finito e então, $(c,d) \equiv (a,b)$. O seguinte resultado importante foi estabelecido: (c,d) é finito e igual a (a,b). Com isto fica demonstrado o lema. ■

Com esse Lema, temos de (16) que

$$q(x) = (rx^2 + sx + t)p(x) \tag{17}$$

e nós podemos fazer $c = a$ e $d = b$.

3.1.2. Existência da derivada e a relação entre as funções de peso

Considere a função

$$S(x) = k\int_a^x (t-l)p(t)dt,$$

onde k y l são tais que $S(b) = 0$, $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b q(x)dx$. A integração por partes aplicada a $\int_a^b S(x)\Phi'_{n+1}(x)dx$ fica, pois $S(a) = S(b) = 0$,

$$\int_a^b S(x)\Phi'_{n+1}(x)dx = \int_a^b \Phi_{n+1}(x)k(x-l)p(x)dx = 0, \qquad (n \geq 1).$$

Mas $q(x)$ é a função de peso para os polinômios ortogonais $\{\Phi'_n\}$, de onde

$$\int_a^b S(x)\Phi'_{n+1}(x)dx = \int_a^b \Phi'_{n+1}q(x)dx = 0, \qquad (n \geq 1)$$

isto, e a relação $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b q(x)dx$ resultam

$$\int_a^b S(x)x^n dx = \int_a^b q(x)x^n dx, \qquad (n \geq 0),$$

e então $q(x) = S(x)$ quase em todo lugar. Como $S(x)$ tem derivada quase em todo lugar, $q(x)$ tambem vai ter derivada quase em todo lugar e

$$q'(x) = k(x-l)p(x), \qquad q(a) = q(b) = 0. \tag{18}$$

Dividindo (18) por (17), temos

$$\frac{q'(x)}{q(x)} = \frac{k(x-l)}{rx^2+sx+t}\ , \qquad q(a) = q(b) = 0. \tag{19}$$

Vamos demonstrar agora que (i) rx^2+sx+t tem raízes reais, (ii) $r \neq 0$. (i) Assumamos que rx^2+sx+t tem raízes imaginárias. Integrando a equação diferencial (19), temos

$$\begin{aligned} \log q(x) &= \int \frac{k(x-l)}{rx^2+sx+t}dx + c, \\ q(x) &= K(rx^2+sx+t)^{\alpha} e^{\beta \arctan(\gamma x+\delta)} \\ & \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, K \quad \text{ctes}) \end{aligned}$$

Isto é incompatível com que $q(a) = q(b) = 0$. (ii) Assumamos primeiro $r = s = 0$,então a equação (19) torna-se

$$\begin{aligned} q'(x) &= (2\alpha+\beta)q(x) \\ q(x) &= Ke^{\alpha x^2+\beta x}, \qquad (\alpha, \beta, K \quad \text{ctes}) \end{aligned}$$

o que não se anula em a nem em b.

Agora suponhamos $r = 0$, $s \neq 0$. A equação (19) dá

$$\begin{aligned} \frac{q'(x)}{q(x)} &= \frac{k(x-l)}{sx+t} = \alpha + \frac{\beta s}{sx+t}\ , \\ q(x) &= K(sx+t)^{\beta} e^{\alpha x}, \qquad (\alpha, \beta, K \quad \text{ctes}). \end{aligned}$$

Isto não pode ser zero em ambos pontos $x = a$ e $x = b$.

Tendo provado (i) e (ii), fazemos

$$rx^2+sx+t = r(x-g)(x-h), \qquad (r \neq 0, g, h \quad \text{reales}),$$

e reescrevemos (19) como segue:

$$\frac{q'(x)}{q(x)} = \frac{k(x-l)}{rx^2+sx+t} = \frac{\alpha}{x-g} + \frac{\beta}{x-h}\ ,$$

de onde

$$q(x) = K(x-g)^{\alpha}(x-h)^{\beta}, \qquad (K, \alpha, \beta \quad \text{ctes})$$

A condição $q(a) = q(b) = 0$ precisa que $g = a$, $h = b$, tal que finalmente (sem importar os fatores constantes)

$$q(x) = -r(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}.$$

e então por (17)

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{q(x)}{rx^2+sx+t} = \frac{r(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}}{r(x-a)(b-x)} \\ p(x) &= (x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1} \end{aligned}$$

e vemos que α e β são ambos maiores que zero.

Como essa é a função de peso dos polinômios ortogonais de Jacobi, temos portanto estabelecido seguinte teorema:

Teorema 4 *Se $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ é um conjunto de polinômios ortogonais com relação à função de peso $p(x)$ no intervalo finito (a, b), e se assumimos que as derivadas desses polinômios $\{\Phi_n'\}_{n=1}^{\infty}$ são também um sistema de polinômios ortogonais em certo intervalo (c, d) (infinito ou não), com a função de peso não negativa $q(x)$, então $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ é o conjunto de polinômios ortogonais de Jacobi.*

3.2. Os polinômios de Laguerre e Hermite

Nós vimos que quando o intervalo (a, b) é finito os polinômios que satisfazem que eles e suas derivadas são ortogonais são os Polinômios de Jacobi. Na presente seção extenderemos o caso para quando (a, b) seja infinito, pelo que vamos obter os polinômios de Laguerre e Hermite.

3.2.1. Função de peso para $\{\phi_n'(x)\}_{n=0}^{\infty}$

Na demonstração feita se mostra que as constantes r, s, t (não todas zeros) podem ser determinadas de forma que

$$\int_a^b x^i q_1(x)dx = \int_a^b x^i q(x)dx, \qquad q_1(x) = (rx^2+sx+t)p(x), \quad i = 0, 1, \cdots. \tag{20}$$

Onde $p(x)$ é a função de peso para os polinômios $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$; $q(x)$ é a função de peso para os polinômios $\{\phi_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$. E como temos provado anteriormente, podem ser tomados com o mesmo soporte (a, b).

Suponhamos agora que (a, b) é o menor intervalo no sentido que não exista um número h, $(a < h < b)$ tal que $\int_a^h p(x)dx = 0$ ou $\int_h^b p(x)dx = 0$. Não há restrição em assumir que seja uns dos intervalos são $(a, b) = (0, \infty)$ ou $(a, b) = (-\infty, \infty)$.(Fazer, se é necessário uma transformação linear de x.) Seguindo a prova feita antes temos

$$S(x) = K\int_a^x (z-L)p(z)dz, \qquad a \le x \le b, \tag{21}$$

onde K e L são constantes determinadas pelas condições $S(b)=0$ e $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b q(x)dx$. As condições de contorno em $S(x)$ requerem que o integrando $(z-L)p(z)$ mude de sinal de modo que $a<L<b$. Então $\int_a^x (z-L)p(z)dz$ decresce em (a,L) e cresce em (L,b), portanto esta integral é sempre menor ou igual a zero. Portanto,

$$\int_a^b K\Big(\int_a^x (z-L)p(z)dz\Big)dx = \int_a^b q(x)dx > 0$$

requere que $K<0$ então $S(x)\geq 0$. Suponhamos

$$\epsilon_x \equiv \int_x^\infty K(z-L)p(z)dz$$

y

$$\epsilon_x^{'} \equiv \int_x^\infty Kz^i(z-L)p(z)dz,$$

onde i é um inteiro positivo. Então, $S(x) = -\epsilon_x$, $-\epsilon_x^{'} \geq -\epsilon_x x^i$ se $x>|L|$, e $\epsilon_x, \epsilon_x^{'} \to 0$ quando $x\to\infty$. Por isto, $S(x)\leq -\epsilon_x^{'}/x^i$ se $x>|L|$, e $x^iS(x)\to 0$ quando $x\to\infty$, $(i=0,1,\cdots)$. Do mesmo jeito, se $a=-\infty$, provamos que $x^iS(x)\to 0$ quando $x\to-\infty$, $(x=0,1,\cdots)$. Em qualquer caso, $\int_a^b x^iS(x)dx$ existe, $(i=0,1,\cdots)$. Concluimos que $S(x)$ tem as seguintes propriedades:

$$K<0,\ \ a<L<b,\ \ S(x)>0,\ \ a<x<b,\ \ S(a)=S(b)=0,$$

$$\begin{array}{rcll} S^{'}(x) & = & K(x-L)p(x) \ \ \text{existe quase em todo lugar} & \\ S^{'}(x) & \geq & 0, \quad a\leq x\leq L, \text{quase em todo lugar} & \\ S^{'}(x) & \leq & 0, \quad L\leq x\leq b, \text{quase em todo lugar} & \\ x^iS(x) & \to & 0 \text{ quando } x\to a \text{ ou } b, & i=0,1,\cdots. \end{array} \tag{22}$$

Agora obtemos,

$$\int_a^b S(x)x^idx = \int_a^b q_1(x)x^idx = \int_a^b q(x)x^idx, \qquad i=0,1,\cdots,$$

$$\int_a^b S(x)\phi_m^{'}(x)\phi_n^{'}(x)dx = \int_a^b q_1\phi_m^{'}(x)\phi_n^{'}(x)dx = 0, \qquad m\neq n;\ \ m,n=0,1,\cdots, \tag{23}$$

$$q_1(x)\equiv S(x)+T(x), \qquad \int_a^b T(x)x^i = 0, \qquad i=0,1,\cdots.$$

No intervalo finito isto requer que $T(x)=0$ quase em todo lugar, mas no intervalo infinito este resultado não necessariamente se tem $\big($O exemplo de Stieltjes é $\int_0^\infty x^ne^{-x^{1/4}}sen(x^{1/4})dx=0$, $n=0,1,\cdots$ $\big)$.De qualquer maneira, se conhece que se $\int_\infty^{-\infty} T(x)x^idx=0$, $(i=0,1,\cdots)$, e se $\int_{-x}^x |T(z)|dz$ existe para todo x, e $T(x)\geq 0$ para $|x|$ suficientemente grande, então $T(x)\equiv 0$ quase em todo lugar. Provaremos agora esta afirmação.

Suponha $T(x) \geq 0$ para $|x| \geq A$. Por (23), $\int_{-x}^{x} |T(z)|dz$ existe para todo x. Fixamos $A^{'}$ e i par. Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x)x^i dx = \int_{-\infty}^{-A} T(x)x^i dx + \int_{-A}^{A} T(x)x^i dx + \int_{A}^{A^{'}} T(x)x^i dx$$
$$+ \int_{A^{'}}^{A^{'}+1} T(x)x^i dx + \int_{A^{'}+1}^{\infty} T(x)x^i dx = \sum_{n=1}^{5} I_n = 0$$

onde $I_1 \geq 0$, $I_3 \geq 0$, $I_4 \geq 0$, $I_5 \geq 0$, $I_2 \leq 0$, $I_1 + I_3 + I_5 \geq 0$, y $I_2 + I_4 \leq 0$. Dado $\epsilon > 0$, suponhamos que $T(x) \geq \epsilon$ em algum conjunto G de medida positiva em (A, ∞). Fixemos $A^{'}$, $(A^{'} > A)$, tal que o intervalo $(A^{'}, A^{'} + 1)$ contenha um subconjunto de G de medida $\sigma > 0$. Então $I_4 > 0$ e

$$\frac{|I_2|}{I_4} \leq \frac{\int_{-A}^{A} x^i \big|T(x)\big| dx}{\sigma\epsilon(A')^i} \leq \frac{A^i \int_{-A}^{A} \big|T(x)\big| dx}{\sigma\epsilon(A')^i} < 1$$

se i é suficientemente grande, dado que $A/A^{'} < 1$. Então $|I_2| < I_4$, $I_2 + I_4 > 0$, o qual é uma contradição. Por isto $T(x) \equiv 0$ quase em todo lugar de (A, ∞), e similarmente em $(-\infty, -A)$. Concluimos que $\int_{-A}^{A} T(x)x^i dx = 0$, $(i = 0, 1, \cdots)$, por isto $T(x) \equiv 0$ quase em todo lugar.

Como $S^{'}(x) = K(x - L)p(x)$ quase em todo lugar, (20) e (23) dão a equação diferencial

$$(rx^2 + sx + t)S^{'}(x) - K(x - L)S(x) = K(x - L)T(x). \qquad (24)$$

A solução de (24) é

$$\begin{aligned} S(x) &= S_1(x) + Cf(x), & \log f(x) = \int_c^x \frac{K(z-L)dz}{rz^2 + sz + t}, \\ S_1(x) &= f(x) \int_c^x \frac{K(z-L)T(z)dz}{(rz^2 + sz + t)f(z)}, & c, C \text{ constantes.} \end{aligned}$$

3.2.2. Discussão de $rx^2 + sx + t$

(i) Primeiro suponhamos que $rx^2 + sx + t$ tem zeros imaginários. Então

$$f(x) = (rx^2 + sx + t)^{\alpha} e^{\beta \arctan(\gamma x + \delta)}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ constantes,}$$

onde $r[1 + (\gamma x + \delta)^2] \equiv \gamma^2(rx^2 + sx + t)$, $2\alpha r = K$, y $\beta r = -\alpha(2rL + s)$. Como $\beta_0 = \int_a^b q_1(x)dx > 0$, concluimos que $r > 0$, $\alpha < 0$, y $rx^2 + sx + t > 0$ em (a, b).

Seja i um inteiro tal que $\alpha + i \geq 0$, $i \geq 1$, e seja $f_1(x) = (rx^2 + sx + t)^i[(\alpha + i)(2rx + s) + \beta r/\gamma]f(x)$.

Integrando por partes temos

$$\int_a^b \frac{S(x)}{f(x)} f_1^{'}(x)dx = \Big[f_1(x)\Big\{\int_c^x \frac{K(z-L)T(z)dz}{(rx^2 + sx + t)f(z)} + C\Big\}\Big]_a^b$$
$$-K \int_a^b (x - L)(rx^2 + sx + t)^{i-1}\Big[(\alpha + i)(2rx + s) + \frac{\beta r}{\gamma}\Big]T(x)dx,$$

$$\int_a^b S(x)(rx^2+sx+t)^{i-1}\Big\{\Big[(\alpha+i)(2rx+s)+\frac{\beta r}{\gamma}\Big]^2$$
$$+2r(\alpha+i)(rx^2+sx+t)\Big\}dx=0.$$

Como o integrando não muda de sinal, concluimos que $S(x)\equiv 0$ quase em todo lugar, o qual é impossível por (22).

(ii) Suponhamos agora que $rx^2+sx+t=r(x-g)^2$. Como em (i), $r>0$. Aqui

$$f(x)=(x-g)^\alpha e^{\beta/(x-g)},\qquad \alpha,\beta \text{ constantes.}$$

Seja i um inteiro tal que $\alpha+i\geq 0$, $i\geq 2$ e

$$f_1(x)\equiv (x-g)^i[(\alpha+1)(x-g)-\beta]f(x).$$

Como é (i),

$$\int_a^b \frac{S(x)}{f(x)}f_1^{'}(x)dx=0,$$

o que é impossível.

(iii) Suponhamos que $rx^2+sx+t=r(x-g)(x-h)$, (g,h reais; $g<h$). (Se (a,b) é finito, isto é único caso possível, pois $T(x)\equiv 0$ quase em todo lugar.) Aqui $f(x)=(x-g)^\alpha(x-h)^\beta$,

$$S(x)=(x-g)^\alpha(x-h)^\beta\Big\{\int_c^x\frac{K(z-L)T(z)dz}{r(z-g)^{\alpha+1}(x-h)^{\beta+1}}+C\Big\}$$
$$\alpha,\beta,c,C \text{ ctes, } r(\alpha+\beta)=K$$

Se i,j são inteiros tais que $\alpha+i>0$, $\beta+j>0$, $i\geq 1$, $j\geq 1$, então, integrando por partes, achamos que

$$\int_a^b \frac{S(x)}{(x-g)^\alpha(x-h)^\beta}\frac{d}{dx}[(x-g)^{\alpha+i}(x-h)^{\beta+j}]dx=0$$

$$\int_a^b S(x)(x-g)^{i-1}(x-h)^{j-1}(x-\overline{x})dx=0,\qquad \overline{x}=\frac{(\alpha+i)h+(\beta+j)g}{\alpha+\beta+i+j}.$$

Isto é impossível, como já temos visto para $a=0$. (A demonstração é similar se $a=-\infty$.) Se $\overline{S}(x)\equiv S(x)(x-g)^{i-1}(x-h)^{j-1}(x-\overline{x})$, e se as constantes A e $A^{'}$ são selecionadas tais que $A^{'}>A>3|h|+|L|+1$, então

$$\int_0^\infty \overline{S}(x)dx=\int_0^A\overline{S}(x)dx+\int_A^{A^{'}}\overline{S}(x)dx+\int_{A^{'}}^{A^{'}+1}\overline{S}(x)dx$$
$$+\int_{A^{'}+1}^\infty\overline{S}(x)dx\equiv\sum_{n=1}^4 i_n=0.$$

se i é tão grande que $|\overline{x}-h|<|h|+1$, temos

$$i_2>0,\qquad i_3>0,\qquad i_4>0,\qquad i_1<0,\qquad i_2+i_4>0,\qquad i_1+i_3<0.$$

Por outra parte,

$$\frac{|i_1|}{i_3} \leq \frac{(A-g)^{i-1}(A-h)^{j-1}(A-\overline{x})}{(A'-g)^{i-1}(A'-h)^{j-1}(A'-\overline{x})S(A'+1)} \int_0^A S(x)dx < 1$$

se i é suficientemente grande. Então $|i_1| < i_3$, contradizendo que $i_1 + i_3 < 0$.

Desses casos concluimos que $r = 0$.

(iv) Suponhamos que $r = 0$, $s \neq 0$. Seja

$$\frac{K(x-L)}{sx+t} = \beta + \frac{\alpha s}{sx+t}, \qquad \alpha, \beta \text{ constantes}, \ \beta s = K$$

A condição $S(b) = 0$ implica

$$\int_a^b [\beta(sx+t)p(x) + \alpha s p(x)]dx = \beta \int_a^b q_1(x)dx + \alpha s \int_a^b p(x)dx$$

$$= \beta\beta_0 + \alpha s \alpha_0 = 0.$$

Onde podemos ter $\alpha > 0$, porque $\alpha_0,\ \beta_0 > 0,\ \ \beta_s < 0$. Nesse caso, $f(x) = (sx+t)^\alpha e^{\beta x}$, e

$$S(x) = (sx+t)^\alpha e^{\beta x} \Big\{ \int_c^x \frac{K(z-L)T(z)dz}{(sz+t)^{\alpha+1}e^{\beta z}} + C \Big\}, \qquad c, C \text{ constantes}.$$

Se $a < -t/s \equiv -t^{'}$, a existência de $S(x)$ perto de $-t^{'}$ requer da existência da integral

$$\int_c^{-t^{'}} K(z-L)(sz+t)^{-\alpha-1}e^{-\beta z}T(z)dz,$$

tal que $S(-t^{'}) = 0$, o que é impossível. Por isto $sx+t$ não muda de sinal em (a, b), e $s > 0$ porque $\beta_0 > 0$. Então $a = 0$, $\beta < 0$, $t^{'} \equiv t/s \geq 0$.

Seja

$$S_2(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{em } (0, t^{'}), \\ S(x-t^{'}) & \text{em } (t^{'}, \infty) \end{cases}$$

onde

$$S(x-t^{'}) \equiv \frac{1}{s} x^\alpha e^{\beta x} \Big\{ \int_c^x \frac{K(z-L-t^{'})T(z-t^{'})dz}{z^{\alpha+1}e^{\beta z}} + C^{'} \Big\},$$

$$c, C^{'} \text{ constantes .}$$

A função de peso $S(x-t^{'})$ em $(t^{'}, \infty)$ e $S_2(x)$ em $(0, \infty)$ tem o mesmo sistema de polinômios ortogonais $\{\phi^{'}(x-t^{'})\}$ pois os momentos são os mesmos. Seja

$$T_1(x) \equiv S_2(x) + C_1 x^\alpha e^{\beta x},$$

onde a constante C_1 é determinada tal que $\int_0^\infty T_1(x)dx = 0$. Integrando por partes, temos

$$\int_0^\infty \frac{T_1(x)}{x^\alpha e^{\beta x}} \frac{d}{dx}[x^{\alpha+i}e^{\beta x}]dx = 0, \qquad i \geq 1,$$

$$\int_0^\infty T_1(x)x^{i-1}[\alpha+i+\beta x]dx = \int_0^\infty T_1(x)x^{i-1}dx = 0,$$

$$i = 1, 2, \cdots .$$

Portanto, se omitimos a função $T_1(x)$ cujos momentos são zeros, a função de peso é da forma $Cx^\alpha e^{\beta x}$ (C uma constante arbitrária). Substituindo x por $-x/\beta$ e fazendo $C = (-\beta)^\alpha$, temos a função de peso $x^\alpha e^{-x}$ a qual é a função de peso dos polinômios ortogonais de Laguerre com a propriedade que

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\phi_m(x)\phi_n(x)dx = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\phi'_m(x)\phi'_n(x)dx = 0$$

$$\alpha > 0; m \neq n; m, n = 0, 1, \cdots .$$

(v) Suponhamos que $r = s = 0$, $t \neq 0$. Como $\beta_0 > 0$, podemos ter $t > 0$. Aqui $f(x) = e^{K'(x^2-2Lx)}$, e

$$S(x) = e^{K'(x^2-2Lx)}\Big\{\int_c^x 2K'(z-L)e^{-K'(z^2-2Lz)}T(z)dz + C\Big\},$$

$$K', c, C \text{ constantes }, K' = K/2t < 0.$$

Se i é um impar positivo, a função

$$e^{-K'(x^2-2Lx)}\int_\infty^x (z-L)^i e^{K'(z^2-2Lz)}dz$$

é um polinômios em x. Portanto, integrando por partes temos $\int_a^b S(x)(x-L)^i dx = 0$, ($i$ impar), o qual requer que $a = -\infty$. Como por (23)

$$\int_{-\infty}^\infty p(x)(x-L)^i dx = \int_{-\infty}^\infty p(x+L)x^i dx = \int_{-\infty}^\infty p(-x+L)x^i dx = 0,$$

$$i \text{ impar},$$

$$\int_{-\infty}^\infty p(x+L)x^i dx = \int_{-\infty}^\infty p(-x+L)x^i dx, \qquad i \text{ par},$$

daqui segue que $p_1(x) \equiv p(x+L)+p(-x+L)$ é a função de peso para $\{\phi_n(x+L)\}$. Assumamos que $p(x)$ tem sido substituído por $p_1(x)$, encontramos que $p_1(-x) \equiv p_1(x)$, $T(-x) = T(x)$, $S(-x) = S(x)$, e

$$S(x) = e^{K'x^2}\Big\{\int_0^\infty 2K'ze^{-K'z^2}T(z)dz + C\Big\}, \qquad K', C \text{ constantes}.$$

Seja

$$T_1(x) = e^{K'x^2}\Big\{\int_0^\infty 2K'ze^{-K'z^2}T(z)dz + C_1\Big\},$$

onde C_1 é uma constante determinada. Então $T_1(-x) \equiv T_1(x)$, e $\int_{-\infty}^\infty T_1(x)x^i dx = 0$, ($i$ impar). Se i é par, então a integração por partes mostra que

$$u(x) \equiv e^{-K'x^2}\int_\infty^x z^i e^{K'z^2}dz = xP_{i-2}(x) + C_2e^{-K'x^2}\int_{-\infty}^x e^{K'z^2}dz,$$

onde $P_{i-2}(x)$ é um polinômio de grau $i-2$ em x, ($i \geq 2$, C_2 constante). Daqui segue

$$\int_0^\infty T_1(x)x^i dx = \Big[\int_\infty^x z^i e^{K^{'}z^2}dz\Big\{\int_0^x 2K^{'}ze^{-K^{'}z^2}T(z)dz + C_1\Big\}\Big]_0^\infty$$

$$-2K^{'}\int_0^\infty xT(x)u(x)dx$$

$$= C_2\Big\{C_1\int_\infty^x e^{K^{'}z^2}dz - 2K^{'}\int_0^\infty xT(x)e^{-K^{'}z^2}\Big(\int_\infty^x e^{K^{'}z^2}dz\Big)dx\Big\} = 0$$

i par

se C_1 é apropriadamente escolhido. Por isto $\int_{-\infty}^{\infty} T_1(x)x^i dx = 0$, $(i = 0, 1, \cdots)$. Exceto por uma função cujos momentos são zeros, a função de peso se reduz a $C_3 e^{K^{'}x^2}$, (C_3 é uma constante arbitrária). Substituindo x por $x/(-K^{'})^{1/2}$ e fazendo $C_3 = 1$, temos e^{-x^2} a qual é a função de peso para os polinômios ortogonais de Hermite.

4. Conclusões

Temos demonstrado que quando um sistema de polinômios ortogonais é tal que suas derivadas também formam um sistema de polinômios ortogonais então o sistema inicial somente podem ser os polinômios de Jacobi, de Hermite ou de Laguerre. Esta demonstração baseia-se nas relações entre as funções de peso de ambos sistemas de polinômios ortogonais (os originais e suas derivadas).

Dado que os únicos polinômios ortogonais que satisfazem a condição antes mencionada são esses três e só eles, então esses três sistemas de polinômios ortogonais são os únicos que satisfazem as condições de Bochner. Portanto os polinômois ortogonais clássicos são os de Hermite, Laguerre e Jacobi.

Referencias

[1] S. Bochner, Über Sturm-Liouville polynomsysteme, Math. Z. **29** (1929), 730-736.

[2] R.P. Boas, The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation, Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 399-404

[3] A.M. Krall, Orthogonal Polynomials satisfying fourth order differential equations, SIAM J. Math. Anal. **9** (1978), 600-603.

[4] W. Hahn, Über die Jacobiscehn Polynome und zwei verwandte Polynomklassen, Mathematishe Zeitschrift, vol. 39 (1935), pp. 634-638.

[5] H.L. Krall, On derivates of Orthogonal Polinomials, American Mathematical Society, vol. 42 (1936), pp. 423-428.

[6] M. S. Webster, Orthogonal Polynomials with ortogonal derivates, American Mathematical Society, (1938), pp. 880-888.

[7] W. Hahn, Über höhere ableitungen von orthogonal polynomen, Ibid. 43, (1937) 101.