# Um Teorema de Gromov Sobre Grupos de Crescimento Polinomial

Rafael Montezuma Pinheiro Cabral

Orientador: Roberto Imbuzeiro

Este trabalho foi escrito no período letivo Agosto/Novembro de 2010 do IMPA com a finalidade de ser o texto de conclusão da disciplina Seminário de Pesquisa para Mestrado, organizada pelos professores Carlos Gustavo Moreira, Luiz Henrique de Figueiredo e Roberto Imbuzeiro Oliveira.

# Conteúdo

# Introdução

Em meados da década de 1960, John Milnor e Joseph Wolf fizeram três conjecturas sobre crescimentos de grupos finitamente gerados. Eles estavam analisando propriedades dos grupos fundamentais de variedades Riemannianas com condições específicas sobre curvatura quando deram origem a esses problemas com ares puramente algébricos.

O primeiro fato importante dessa história foi a prova por Wolf, em [6], de que um grupo policíclico que não é virtualmente nilpotente tem crescimento exponencial. Policíclico significa finitamente gerado, solúvel e tal que todo subgrupo é finitamente gerado. Em seguida, Milnor mostrou que se o grupo é solúvel mas não é policíclico então ele também tem crescimento exponencial, ver [4]. As propriedades de crescimento, polinomial ou exponencial, são mantidas para subgrupos de índice finito, por isso segue-se o seguinte:

**Teorema 1.** *Um grupo virtualmente solúvel tem uma das seguintes propriedades: ou é virtualmente nilpotente ou tem crescimento exponencial.*

Com base nisso, observa-se uma espécie de limiar para a propriedade de um grupo ter crescimento polinomial. Foram elaboradas as seguintes conjecturas:

**Conjectura 0.0.1** (Milnor)**.** *Todo grupo finitamente gerado de crescimento polinomial é virtualmente nilpotente.*

**Conjectura 0.0.2** (Wolf)**.** *Todo grupo finitamente gerado que não tem crescimento polinomial tem crescimento exponencial.*

A segunda conjectura foi provada por Tits, ver [5], no caso de subgrupos de grupos de Lie com finitas componentes. A afirmação geral de Wolf é falsa, ou seja, existem grupos de crescimento intermediário. O primeiro exemplo é divido a Grigorchuk.

Utilizando-se do resultado de Tits, Michael Gromov provou a afirmação de Milnor no trabalho intitulado *Groups of polinomial growth and expanding maps*. A prova de Gromov é particularmente importante pela introdução de uma métrica no espaço dos espaços métricos que tem diversas aplicações, é a chamada métrica de Gromov-Hausdorff.

A presente exposição do Teorema de Gromov será precedida de três partes. O primeiro capítulo é dedicado a uma exposição detalhada do problema e uma ideia geral da demonstração do resultado. Os capítulos 2 e 3 tratam das duas ideias centrais da prova, um lema algébrico que é uma síntese dos vários resultados mencionados acima e o estudo das propriedades da nova métrica introduzida por Gromov.

# Capítulo 1

# Conhecendo os Elementos e as Ferramentas

## 1.1 Geometrização de um Grupo

Seja $\Gamma$ um grupo com conjunto de geradores finito e simétrico $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$. Consideramos a métrica das palavras em $\Gamma$ com letras no conjunto de geradores fixo,

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha^{-1}\beta| = \min\{n : \alpha^{-1}\beta = \gamma_{i_1} \cdot \ldots \cdot \gamma_{i_k}\}. \tag{1.1}$$

O espaço métrico $(\Gamma, d)$ é homogêneo e métricas obtidas de conjuntos de geradores distintos são equivalentes, no sentido de que se $d'$ é a métrica relativa a outro sistema de geradores, então existe uma constante $C > 1$ satisfazendo:

$$\frac{1}{C} \cdot d(\alpha, \beta) \leq d'(\alpha, \beta) \leq C \cdot d(\alpha, \beta).$$

Sejam $\alpha, \beta \in \Gamma$ e $r \geq 0$. Pela homogeneidade de $(\Gamma, d)$, segue que as bolas $B_r(\alpha)$ e $B_r(\beta)$ têm o mesmo número de elementos. Para cada $r \geq 0$ seja $b_r = |B_r(e)|$ a quantidade de elementos na bola de raio $r$ centrada na identidade $e \in \Gamma$. Se existem constantes $p$ e $M$ tais que $b_r \leq Mr^p$, para todo $r \geq 1$, dizemos que $(\Gamma, d)$ tem crescimento polinomial. Se o grupo tem crescimento polinomial para uma métrica de palavras fixa, então ele tem esta propriedade para qualquer outra métrica de palavras, pois métricas relativas a conjuntos de geradores distintos são equivalentes. Nesse caso dizemos que $\Gamma$ tem *crescimento polinomial* e definimos o seu crescimento como

$$cres(\Gamma) = \inf\{s : b_r \cdot r^{-s} \text{ é limitada em } r\}. \tag{1.2}$$

Segue da equivalência das métricas que o valor $cres(\Gamma)$ não depende dos geradores.

Grupos abelianos finitamente gerados são os exemplos mais simples de grupos de crescimento polinomial. Exemplos mais elaborados e motivadores foram dados por Wolf em [6], são os grupos que possuem subgrupo nilpotente de índice finito, conhecidos como virtualmente nilpotentes ou ainda quase nilpotentes. Tratamos um pouco desses exemplos na seção seguinte.

Por outro lado, se existem constantes $M > 0$ e $p > 1$ satisfazendo $b_r \geq M \cdot p^r$, para todo $r \geq 0$, dizemos que $\Gamma$ tem *crescimento exponencial.*

## 1.2 Grupos Virtualmente Nilpotentes

Dado um grupo $\Gamma$, consideramos a seguinte série normal: $\Gamma_0 = \Gamma$ e $\Gamma_{i+1}$ é o grupos dos comutadores de $\Gamma$ e $\Gamma_i$, ou seja, $[\Gamma, \Gamma_i]$. Dizemos que $\Gamma$ é nilpotente se esta série normal é quase toda trivial. E dizemos que $\Gamma$ é virtualmente nilpotente se ele tem um subgrupo nilpotente de índice finito.

O objetivo dessa seção é expor a razão pela qual são considerados os grupos virtualmente nilpotentes no estudo do crescimento de grupos finitamente gerados. Isto será feito em dois passos. Primeiro, veremos que grupos nilpotentes $\Gamma$ de classe 2 têm crescimento polinomial. Depois, veremos que um subgrupo de índice finito de um grupo finitamente gerado tem o mesmo crescimento do próprio grupo.

Seja $\Gamma$ um grupo nilpotente de classe 2, isto é, $\Gamma_2 = [\Gamma, [\Gamma, \Gamma]] = \{e\}$ é trivial. Observe que o subgrupo dos comutadores está contido no centro de $\Gamma$, $Z(\Gamma)$. De fato, para cada $g \in \Gamma$ e $h \in [\Gamma, \Gamma]$, temos $[g, h] = e$, o que implica que $g$ e $h$ comutam. Fixado $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$, sistema de geradores simétrico de $\Gamma$, todo elemento $g \in \Gamma$ com $|g| \leq n$ pode ser escrito como $g = \gamma_{i_1} \ldots \gamma_{i_r}$, com $r \leq n$. Vamos reescrever $g$ na forma $\gamma_1^{e_1} \ldots \gamma_k^{e_k} g'$, com $g' \in [\Gamma, \Gamma]$. Para tanto, observe que se $i_{r-1} > i_r$, podemos fazer a seguinte inversão:

$$\gamma_{i_{r-1}} \gamma_{i_r} = \gamma_{i_r} \gamma_{i_{r-1}} [\gamma_{i_{r-1}}^{-1}, \gamma_{i_r}^{-1}].$$

Como $[\Gamma, \Gamma] < Z(\Gamma)$, então conseguimos escrever $g$ como desejávamos, com $g'$ compostos de no máximo $n^2$ comutadores do tipo $[\gamma_i^{-1}, \gamma_j^{-1}]$. Seja $m > 0$ tal que $|[\gamma_i^{-1}, \gamma_j^{-1}]| \leq m$, para todo $i, j$. O grupo $[\Gamma, \Gamma]$ é abeliano, logo tem crescimento polinomial, seja $\tau$ esse crescimento. Portanto, todo $g \in \Gamma$ com $|g| \leq n$ pode ser escrito como

$$g = \gamma_1^{e_1} \ldots \gamma_k^{e_k} g', \text{ com } \sum e_i \leq n \text{ e } |g'| \leq mn^2 \text{ em } [\Gamma, \Gamma].$$

Donde concluímos que $b_n \leq C n^{k-1} n^{2\tau}$, para alguma constante $C > 0$. Usando as mesmas idéias desse método podemos mostrar que grupos nilpotentes de qualquer classe têm crescimento polinomial.

Para concluir a seção, vamos tratar o caso dos subgrupos $\Gamma' < \Gamma$ de índice finito em um grupo $\Gamma$ de crescimento polinomial. Por um lado é claro que o crescimento do subgrupo é menor ou igual ao do grupo original. Por ora, suponha que $\Gamma'$ é normal em $\Gamma$. Sejam $U = \{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$ conjunto de representantes de $\Gamma'$ em $\Gamma$, $T_0$ conjunto de geradores finito e simétrico de geradores de $\Gamma'$ e $T = \{\mu_i^{-1} t \mu_i : t \in T_0 \text{ e } \mu_i \in U\}$. Considere o conjunto

$V = U \cup T$ de geradores de $\Gamma$, vamos calcular o crescimento de $\Gamma$ com relativamente a esse conjunto e ao crescimento de $\Gamma'$.

Vamos começar escolhendo uma constante especial da seguinte maneira: para cada $\mu_i, \mu_j \in U$ e $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$, seja $\mu_{f(\varepsilon i, \eta j)} \in U$ tal que $\omega_{\varepsilon i, \eta j} = \mu_i^\varepsilon \mu_j^\eta \mu_{f(\varepsilon i, \eta j)}^{-1} \in \Gamma'$, tome

$$N = \max\{|\omega_{\varepsilon i, \eta j}| : 1 \leq i, j \leq p \text{ e } \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}\},$$

onde o conjunto de geradores de $\Gamma'$ considerado é $T$. Observe que se $t' = \mu_i^{-1} t \mu_i \in T$ e $\mu_j \in U$, então $t'\mu_j$ pode ser reescrito como $\mu_{k(i,j)}\omega_{t',j}$, onde

$$k(i, j) = f(-i, f(i, j)) \text{ e } \omega_{t',j} = \omega_{-i, f(i,j)}(\mu_{f(i,j)}^{-1} t \mu_{f(i,j)})\omega_{i,j} \in \Gamma'.$$

Além disso, ainda temos que $|\omega_{t',j}| \leq 2N + 1$. Se um elemento $\gamma \in \Gamma$ é tal que $|\gamma| \leq n$ em relação a $V$, então podemos deixá-lo na forma $\gamma = \mu_i \omega$, $\omega \in \Gamma'$, por meio de no máximo $n$ inversões, que podem ser trocar $\mu_i^\varepsilon \mu_j^\eta$ por $\mu_{f(\varepsilon i, \eta j)}\omega_{\varepsilon i, \eta j}$, ou trocar $t'\mu_j$ por $\mu_{k(i,j)}\omega_{t',j}$. Sendo assim, obtemos $|\omega| \leq nN + n(2N + 1)$. Portanto, a quantidade de elementos na bola de raio $n$ de $\Gamma$ com respeito a $V$ pode ser estimada por:

$$b_n \leq C[nN + n(2N + 1)]^{cres(\Gamma')},$$

para alguma constante $C > 0$. O que prova que $cres(\Gamma) \leq cres(\Gamma')$. No caso em que $\Gamma'$ não é normal em $\Gamma$, consideramos o subgrupo de $\Gamma'$ obtido pela interseção de todos os conjugados deste. Ele está contido em $\Gamma'$, mas ainda tem índice finito em $\Gamma$. Isto ocorre porque a quantidade de tais conjugados é finita, o que é o conteúdo do lema 2.3.1.

## 1.3 Ideia da Demonstração

Seja $\Gamma$ um grupo finitamente gerado com uma métrica das palavras $d$. O que Gromov fez inicialmente foi considerar uma sequência de espaços métricos $(\Gamma, r^{-1}d)$, com $r \to \infty$. Ele fez um teorema de pré-compacidade no espaço dos espaços métricos que permitiu, a partir do crescimento polinomial, obter uma subsequência $(\Gamma_n, r_n^{-1}d)$ convergente na métrica Gromov-Hausdorff para um espaço $Y$. O espaço obtido como limite dessa sequência tem várias propriedades fortes: homogeneidade, conexidade e conexidade local, compacidade local e ainda dimensão de Hausdorff finita. Devido ao seguinte grande teorema, segue que o grupo das isometrias de $Y$ é um grupo com muita estrutura:

**Teorema 2** (Montgomery-Zippin)**.** *Seja $Y$ espaço métrico de dimensão finita, localmente compacto, conexo e localmente conexo. Se o grupo $\mathfrak{L}$ das isometrias de $Y$ é transitivo em $Y$, então $\mathfrak{L}$ é um grupo de Lie com finitas componentes conexas.*

O segundo passo da demonstração também é uma grande aplicação das propriedades passadas pelo limite da métrica Gromov-Hausdorff. Baseado na sequência $\Gamma_n$ convergente nessa métrica, Gromov criou uma noção de convergência de aplicações $f_n : \Gamma_n \to \Gamma_n$ a uma aplicação $f : Y \to Y$ de modo que fosse possível obter isometrias de $Y$ a partir de isometrias dos $\Gamma_n$. Com isto, fica possível construir homomorfismos de subgrupos $\Gamma' < \Gamma$ em $\mathfrak{L}$ considerando para cada $\gamma \in \Gamma'$ o limite das aplicações de $\Gamma_n$ dadas pela multiplicação à esquerda por $\gamma$. A importância dessa construção é importante por causa do lema algébrico provado por Gromov que declara o seguinte:

**Lema 1.3.1.** *Sejam $\Gamma$ grupo de crescimento polinomial e $\mathfrak{L}$ grupo de Lie com finitas componentes conexas. Suponha que para cada subgrupo finitamente gerado infinito $\Gamma' < \Gamma$ existe subgrupo $\Delta < \Gamma'$ de índice finito em $\Gamma'$ com uma das seguintes propriedades:*

- *$\Delta$ é abeliano;*
- *Existem homomorfismos $\Delta \to \mathfrak{L}$ com imagens arbitrariamente grandes.*

*Então $\Gamma$ é virtualmente nilpotente.*

A parte final da demonstração é a análise dos homomorfismos criados para que possam ser adaptados de modo a satisfazer as hipóteses do lema algébrico. Uma arma muito poderosa dessa parte final da prova é um corolário do teorema 2. Nas mesmas condições daquele resultado, temos:

**Lema 1.3.2** (Lema de Localização)**.** *Para todo inteiro positivo $p$ e aberto $U \subset Y$, existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se uma isometria não trivial $l \in \mathfrak{L}$ satisfaz*

$$d(l(u), u) \leq \varepsilon,$$

*para todo $u \in U$, então a ordem de $l$ como elemento de $\mathfrak{L}$ é pelo menos $p$.*

# Capítulo 2

# Resultados Algébricos

Esta parte do trabalho contém alguns dos belos resultados na interface de grupos de crescimento polinomial e seus subgrupos especiais já conhecidos antes de Gromov e a síntese feita por ele destes teoremas, chegando ao chamado Lema Algébrico, 1.3.1

## 2.1 Grupos de Crescimento Polinomial

Nessa seção, estudamos a passagem do crescimento polinomial para subgrupos finitamente gerados. Os principais resultados são que subgrupos de índice finito de um grupo de crescimento polinomial têm o mesmo crescimento que o grupo original e que os subgrupos de índice infinito têm crescimento estritamente menor.

Seja $\Gamma$ grupo finitamente gerado munido da métrica das palavras $d$ relativa a um conjunto de geradores fixo. Sabemos que se $\alpha, \beta \in \Gamma$ são tais que $d(\alpha, \beta) = n$, então existem $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n = \beta \in \Gamma$ com $d(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1$. Se $B$ é uma bola de raio $n$ em $\Gamma$ e $B(m)$ é a união das bolas $B_m(\alpha)$ centradas nos pontos $\alpha \in B$ de raio $m$, então $B(m)$ é a bola de raio $n + m$ concêntrica com $B$. Estas duas observações são chamadas propriedades de conectividade de $\Gamma$ e delas segue o resultado mencionado para subgrupos de índice finito.

**Lema 2.1.1.** *Seja $\Gamma$ grupo de crescimento $\tau$. Então seus subgrupos de índice finito têm o mesmo crescimento do próprio grupo.*

Para que possamos considerar o crescimento das bolas dos subgrupos considerados no lema anterior deveríamos considerar apenas subgrupos finitamente gerados, pois existem grupos finitamente gerados que possuem subgrupos que não são finitamente gerados, como o subgrupo dos comutadores do grupos livre com dois geradores. Mas se o subgrupo tem índice finito em um grupo finitamente gerado ele já é finitamente gerado.

Passemos a analisar o caso dos subgrupos de índice infinito. Para cada subgrupo

$\Gamma' < \Gamma$ considere a ação

$$\begin{array}{rcl} \Gamma' \times \Gamma & \longrightarrow & \Gamma \\ (\gamma, \alpha) & \longmapsto & \gamma\alpha. \end{array}$$

Cada aplicação $\widetilde{\gamma} = (\gamma, \cdot)$ é uma isometria de $\Gamma$. Considere o espaço quociente $X = \Gamma/\Gamma'$ munido da métrica induzida

$$d(x, y) = \min\{d(\alpha, \beta) : \pi(\alpha) = x \text{ e } \pi(\beta) = y\}, \quad x, y \in X,$$

onde $\pi : \Gamma \to X$ é a projeção canônica. Podemos considerar o mínimo na definição anterior pois $d$ só assume valores inteiros. É claro que $d$ é positiva definida e simétrica, vejamos a desigualdade triangular. Dados $x, y$ e $z \in X$, existem $\alpha, \beta_1, \beta_2$ e $\delta \in \Gamma$ tais que $\pi(\alpha) = x$, $\pi(\beta_1) = \pi(\beta_2) = y$, $\pi(\delta) = z$, $d(x, y) = d(\alpha, \beta_1)$ e $d(y, z) = d(\beta_2, \delta)$. Além disso, também existe $\lambda \in \Gamma'$ tal que $\beta_2 = \lambda\beta_1$. Portanto,

$$d(x, y) + d(y, z) = d(\alpha, \beta_1) + d(\lambda\beta_1, \delta) = d(\alpha, \beta_1) + d(\beta_1, \lambda^{-1}\delta) \geq d(\alpha, \lambda^{-1}\delta) \geq d(x, z).$$

Vejamos que as propriedades de conectividade são passadas ao espaço quociente $X$. Dados $x, y \in X$ com $d(x, y) = n$, sejam $\alpha \in \pi^{-1}(x)$ e $\beta \in \pi^{-1}(y)$, tais que $d(\alpha, \beta) = d(x, y) = n$. Existem $\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n = \beta \in \Gamma$ com $d(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1$. Para cada $i$, se $x_i = \pi(\alpha_i)$, então $d(x_i, x_{i+1}) \leq 1$. Pela desigualdade triangular de $X$, concluímos $d(x_i, x_{i+1}) = 1$. Com isto fica provada a primeira propriedade de conectividade em $X$. Além disso, também vimos que em um caminho de comprimento mínimo entre $\alpha \in \pi^{-1}(x)$ e $\beta \in \pi^{-1}(y)$ que realizam a distância entre $x$ e $y$ não exitem vértices que sejam adjacentes e equivalentes simultaneamente. Nas condições da segunda propriedade, a inclusão de $B(m)$ na bola concêntrica de raio $n + m$, $B'$, segue da desigualdade triangular em $X$. Usando a primeira propriedade, podemos escrever qualquer ponto $x \in B'$ como $x = y \cdot z$, com $z \in B$ e $|y| \leq m$. Isto garante a segunda inclusão.

Com as propriedades de conectividade do quociente podemos mostrar a validade da afirmação feita sobre subgrupos de índice infinito, este é o conteúdo do seguite lema.

**Lema 2.1.2.** *Seja $\Gamma' < \Gamma$ subgrupo finitamente gerado de índice infinito em $\Gamma$. Então $cres(\Gamma') \leq cres(\Gamma) - 1$.*

*Demonstração.* As propriedads de conectividade de $X = \Gamma/\Gamma'$ implicam que cada bola $B_r$ de raio $r$ em $\Gamma$ têm pelo menos $r+1$ elementos $\alpha_0, \ldots, \alpha_r$ não equivalentes. Considere a interseção $B' = B_r \cap \Gamma'$, bola de raio $r$ em $\Gamma'$, e as suas translações $B'\alpha_i$. Como os $\alpha_i$ não são equivalentes e $B' \subset \Gamma'$, então os $B'\alpha_i$ também são disjuntos. Além disso, é claro que $B'\alpha_i \subset B_{2r}$. Sendo assim, para cada elemento $\gamma \in B'$ temos $r+1$ elementos distintos $\gamma\alpha_i \in B_{2r}$, logo, $|B'|(r + 1) \leq |B_{2r}|$. O que conclui a prova. □

## 2.2 Resultados Usados

Para a demonstração do Lema Algébrico, Gromov usou três teoremas famosos. Dois dos quais sobre subgrupos discretos de grupos de Lie afirmam o seguinte:

**Teorema 3** (Jordan). *Para cada grupo de Lie $\mathfrak{L}$ com finitas componentes existe um número $q$ tal que todo subgrupo finito em $\mathfrak{L}$ tem um subgrupo abeliano de índice no máximo $q$.*

**Teorema 4** (Tits). *Sejam $\mathfrak{L}$ grupo de Lie com finitas componentes e $G < \mathfrak{L}$ subgrupo finitamente gerado. Então existem duas possibilidades:*

**(a)** *$G$ contém um grupo livre de posto 2. Nesse caso $G$ tem crescimento exponencial.*

**(b)** *$G$ é virtualmente solúvel. Nesse caso $G$ tem crescimento exponencial a menos que ele seja virtualmente nilpotente.*

Também é usado na prova do Lema Algébrico o motivador resultado de Milnor-Wolf sobre grupos solúveis de crescimento polinomial:

**Teorema 5** (Milnor-Wolf). *Um grupo solúvel tem crescimento exponencial a menos que contenha um subgrupo nilpotente de índice finito.*

## 2.3 Demonstração do Lema Algébrico

Essa seção é dedicada à prova do Lema Algébrico, enunciado em 1.3.1. A prova será precedida de dois lemas básicos:

**Lema 2.3.1.** *Seja $G$ grupo finitamente gerado e $q \in \mathbb{N}$. Então $G$ tem finitos subgrupos com índice menor ou igual a $q$.*

*Demonstração.* Sejam $H < G$ subgrupo de índice $q$ e $H = H_1, \ldots, H_q$ as classes laterais à direita de $H$ em $G$. Considere a aplicação $\phi : G \to S_q$ definida por $\phi(g) = \sigma$, onde $H_i g = H_{\sigma(i)}$, para cada $g \in G$. A aplicação $\phi$ é um homomorfismo, pois dados $\phi(g_k) = \sigma_k$, $k = 1, 2$, e $\phi(g_1 \cdot g_2) = \sigma$, temos $H_{\sigma(i)} = H_i(g_1 \cdot g_2) = (H_i g_1) g_2 = H_{\sigma_1(i)} g_2 = H_{\sigma_2(\sigma_1(i))} = H_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(i)}$. Observe que $g \in H$ se, e somente se, $Hg = H$, o que também equivale a $\phi(g)(1) = 1$. Então $H$ está associado ao homomorfismo $\phi$, que por sua vez determina $H$ como $H = \{g \in G : \phi(g)(1) = 1\}$. Sendo $G$ finitamente gerado, existem apenas uma quantidade finita de homomorfismos de $G$ no grupo das permutações de $q$ elementos $S_q$, e, consequentemente, $G$ tem finitos subgrupos de índice $q$. $\square$

**Lema 2.3.2.** *Sejam $R, H$ subgrupos de $G$. Então $(H : R \cap H) \leq (G : R)$.*

*Demonstração.* Basta observar que se $h, h' \in H$ são tais que $h(R \cap H) \neq h'(R \cap H)$ então $h^{-1}h' \notin R \cap H$, como $h^{-1}h' \in H$, segue-se que $h^{-1}h' \notin R$, logo, $hR \neq h'R$. $\square$

Pelo Teorema de Milnor-Wolf, basta mostrar que sob as hipóteses de Lema Algébrico o gurpo é virtualmente solúvel. Seja $(\Gamma, d)$ grupo finitamente gerado com a métrica das palavras. Observe que $\Gamma$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que $b_r \cdot r^{-n} \leq C$, para todo $r \geq 1$, onde $b_r$ denota a cardinalidade da bola de raio $r$ em $\Gamma$. Usamos essa equivalência para provar o Lema Algébrico por indução no teto do crescimento de $\Gamma$. O caso base $cres(\Gamma) = 0$ é trivial, pois esse grupo é finito.

Suponha que existe um subgrupo $\Delta < \Gamma$ de índice finito que pode ser mergulado em $\mathcal{L}$ por homomorfismos de imagens arbitrariamente grandes. Para cada $p = 1, 2, \ldots$, seja $\varphi_p : \Delta \to \mathcal{L}$ um homomorfismo tal que $|\varphi_p(\Delta)| \geq p$.

Para a presente demonstração usaremos o seguinte resultado:

**Lema 2.3.3.** *Sob as condições do Lema Algébrico, existe $\mathcal{H} < \Gamma$ subgrupo de índice finito em $\Gamma$ e um epimorfismo $\psi : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}$.*

Relembrando que epimorfismo é um homomorfismo sobrejetor. A prova desse lema será dado em 2.4 e resume-se à análise de dois casos:

- Todas as imagens $\varphi_p(\Delta)$ são finitas.
- Existe um homomorfismo $\varphi : \Delta \to \mathcal{L}$ de imagem infinita.

A existência de um $\mathcal{H}$ com essas propriedades é óbvia no caso em que $\Delta$ é abeliano.

Duas consequências imediatas da existência de $\mathcal{H}$ e do epimorfismo acima são que o índice de $\mathcal{K} = \ker \psi$ em $\mathcal{H}$ é infinito e que $\mathcal{H}$ tem crescimento polinomial. Outro resultado disso, não tão direto, é que o núcleo $\mathcal{K}$ também é finitamente gerado. Para verificarmos isto, começamos observando que $\mathcal{H}$ é finitamente gerado, pois o índice $(\Gamma : \mathcal{H})$ é finito. Sejam $\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_l$ geradores de $\mathcal{H}$, com $\psi(\gamma) = 1$. Se necessário, trocamos o gerador $\gamma_i$ por $\gamma_i - \gamma^{\psi(\gamma_i)}$, para que tenhamos $\gamma_i \in \mathcal{K}$, para todo $1 \leq i \leq l$. Afirmo que $\mathcal{K}$ é da forma

$$\langle \gamma^j \gamma_i \gamma^{-j} |\ \ 1 \leq i \leq l \text{ e } -m \leq j \leq m \rangle.$$

Um elemento $x \in \mathcal{K}$ pode ser escrito como produto de fatores da forma $\gamma^j \gamma_i \gamma^{-j}$. De fato, se $x = \gamma_{i_1} \ldots \gamma_{i_r}$ e $i_s \neq 0$, temos $\psi(\gamma_{i_1} \ldots \gamma_{i_{s-1}}) = j = -\psi(\gamma_{i_{s+1}} \ldots \gamma_{i_r})$. Sendo assim, $\alpha = \gamma_{i_1} \ldots \gamma_{i_{s-1}} \gamma_0^{-j}$ e $\beta = \gamma_0^j \gamma_{i_{s+1}} \ldots \gamma_{i_r}$ estão em $\mathcal{K}$ e $\gamma = \alpha \gamma^j \gamma_{i_s} \gamma^{-j} \beta$. Isto verifica, por indução, a forma do elemento típico de $\mathcal{K}$. Suponha, por contradição, que existe sequência de elementos da forma $\alpha_m = \gamma^m \gamma_i \gamma^{-m}$, ou $\gamma^{-m} \gamma_i \gamma^m$, tais que $\alpha_m \notin \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1} \rangle$. São exatamente $2^{m+1}$ produtos $\alpha_0^{\varepsilon_0} \ldots \alpha_m^{\varepsilon_m}$ distintos com $\varepsilon \in \{0, 1\}$ e todos têm tamanho menor ou igual a $(m+1)(2m+1)$. Logo, $b_{(m+1)(2m+1)} \geq 2^{m+1}$, o que contradiz o crescimento polinomial de $\mathcal{H}$.

Admitindo a existência do subgrupo $\mathcal{H}$, o lema 2.1.2 garante que o crescimento de $\mathcal{K}$ é menor ou igual ao crescimento de $\Gamma$ menos 1. Além disso, é claro todo subgrupo de $\mathcal{K}$ também é subgrupo de $\Gamma$, logo, $\mathcal{K}$ satisfaz todas as hipóteses do Lema Algébrico com o crescimento estritamente menor que o de $\Gamma$. Pela hipótese de indução, segue-se que $\mathcal{K}$ é virtualmente nilpotente. Seja $\mathcal{N} \lhd \mathcal{K}$ subgrupo nilpotente de índice finito.

Seja $\mathcal{K}'$ a interseção de todos os subgrupos de $\mathcal{K}$ de índice $(\mathcal{K} : \mathcal{N})$. Todo subgrupo de um grupo solúvel também é solúvel, logo, $\mathcal{K}'$ é solúvel. Afirmo que $\mathcal{K}'$ também tem índice finito em $\mathcal{K}$. Isso é consequência de que $\mathcal{K}$ é finitamente gerado e do lema 2.3.1. Sendo assim, o que temos até aqui é: $\mathcal{K}' < \mathcal{K} \lhd \mathcal{H} < \Gamma$, onde $\mathcal{K}'$ é solúvel, os índices $(\Gamma : \mathcal{H})$ e $(\mathcal{K} : \mathcal{K}')$ são finitos e $(\mathcal{H} : \mathcal{K})$ é infinito. Considere o grupo $\Gamma' = \langle \mathcal{K}', \gamma \rangle$. Para concluir o argumento da prova veremos três afirmações.

**Afirmação 2.3.1.** *$\mathcal{K}' \lhd \Gamma'$.*

*Demonstração.* O elemento típico de $\Gamma'$ é da forma $x = \gamma^{e_1} k_1 \cdot \ldots \cdot \gamma^{e_r} k_r$, com $k_i \in \mathcal{K}'$. Sendo assim, basta mostrar que $\gamma^{-1}\mathcal{K}'\gamma < \mathcal{K}'$. Dado $x \in \mathcal{K}'$, sabemos que $x \in \widetilde{\mathcal{N}}$, para todo $\widetilde{\mathcal{N}} < \mathcal{K} \lhd \mathcal{H}$ de índice $(\mathcal{K} : \mathcal{N})$ em $\mathcal{K}$. Como $\gamma \in \mathcal{H}$, temos $\gamma\widetilde{\mathcal{N}}\gamma^{-1} < \mathcal{K}$ e seu índice em $\mathcal{K}$ também é $(\mathcal{K} : \mathcal{N})$, logo, $x \in \gamma\widetilde{\mathcal{N}}\gamma^{-1}$. Portanto, $\gamma^{-1}x\gamma \in \widetilde{\mathcal{N}}$ para todo $\widetilde{\mathcal{N}}$, o que nos permite concluir que $\gamma^{-1}x\gamma \in \mathcal{K}'$, como queríamos. □

**Afirmação 2.3.2.** *$\Gamma' \cap \mathcal{K} = \mathcal{K}'$.*

*Demonstração.* Considere novamente um elemento típico de $x \in \Gamma'$ como na afirmação anterior. Se $\psi(x) = 0$, então $\sum e_i = 0$ e podemos reescrever $x$ como

$$x = (\gamma^{e_1} k_1 \gamma^{-e_1}) \cdot (\gamma^{e_1+e_2} k_2 \gamma^{-e_1-e_2}) \cdot \ldots \cdot (\gamma^{\sum e_i} k_r).$$

Usando o fato provado em 2.3.1 concluímos a prova dessa afirmação. □

**Afirmação 2.3.3.** *$\mathcal{K} \cdot \Gamma' = \mathcal{H}$.*

*Demonstração.* Considere $\{\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$ o conjunto de geradores obtido para $\mathcal{H}$ com $\psi(\gamma) = 1$ e $\gamma_i \in \mathcal{K}$, para todo $1 \leq i \leq l$. Cada produto $\gamma^n \gamma_i$ pode ser escrito como $(\gamma^n \gamma_i \gamma^{-n})\gamma^n \in \mathcal{K} \cdot \Gamma'$, pois $\mathcal{K} \lhd \mathcal{H}$. Isto indica que vale a igualdade $\mathcal{K} \cdot \Gamma' = \mathcal{H}$. □

Essas três afirmações podem ser sintetizadas no diagrama abaixo, onde o segmento duplo significa normalidade.

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma \arrow[d, dash] & \\
 & \mathcal{H} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\Gamma' \arrow[dr, dash, double] & & \mathcal{K} \arrow[dl, dash] \\
 & \mathcal{K}' &
\end{tikzcd}$$

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathcal{K}$ representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{K}'$ em $\mathcal{K}$. Para cada $\zeta \in \mathcal{H}$, existem $k \in \mathcal{K}$ e $g \in \Gamma'$, tais que $\zeta = k \cdot g$. Para este $k$, existem $1 \leq i \leq m$ e $k' \in \mathcal{K}'$ tais que $k = \lambda_i \cdot k'$. Com isto, $\zeta\Gamma' = k\Gamma' = \lambda_i\Gamma'$. Isto mostra que $(\mathcal{H} : \Gamma') \leq (\mathcal{K} : \mathcal{K}') < \infty$. Por outro lado, já sabíamos que $(\Gamma : \mathcal{H}) < \infty$. Portanto, $(\Gamma : \Gamma') < \infty$ e $\Gamma > \Gamma' \rhd \mathcal{K}'$ com $\mathcal{K}'$ solúvel, isto é, $\Gamma$ é virtualmente solúvel.

## 2.4 Como Jordan e Tits Ajudaram Gromov

Para concluir a prova do Lema Algébrico, passamos à verificação de 2.3.3. Começamos analisando o caso em que as imagens $\varphi_p(\Delta)$ são finitas. Seja $q$ o valor dado pelo Teorema de Jordan para o grupo de Lie $\mathcal{L}$. Cada imagem $\varphi_p(\Delta)$ é subgrupo finito de $\mathcal{L}$, logo, existe $\mathcal{A}_p < \varphi_p(\Delta)$ subgrupo abeliano de índice $(\varphi_p(\Delta) : \mathcal{A}_p) \leq q$. Seja $\mathcal{H}_p = \varphi_p^{-1}(\mathcal{A}_p)$. Afirmo que o índice de $\mathcal{H}_p$ em $\Delta$ também é no máximo $q$. De fato, sejam $g_1, \ldots, g_q \in \varphi_p(\Delta)$ representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{A}_p$ em $\varphi_p(\Delta)$ e, para cada $1 \leq i \leq q$, escolha um $h_i \in \varphi_p^{-1}(g_i)$. Dado $g \in \Delta$ existe $1 \leq i \leq q$ tal que $g_i^{-1}\varphi_p(g) \in \mathcal{A}_p$, logo, $h_i^{-1}g \in \mathcal{H}_p$ e concluímos que $h_i\mathcal{H}_p = g\mathcal{H}_p$.

Tome $\mathcal{H}$ como sendo a interseção de todos os $\mathcal{H}_p$. Afirmo que $\mathcal{H}$ é um subgrupo de índice finito em $\Delta$ e o subgrupo dos comutadores $[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ tem índice infinito em $\Delta$. Para a primeira parte, basta observar que existem apenas finitos $\mathcal{H}_p$ diferentes, pois todos eles têm índice no máximo $q$, assim podemos usar o lema 2.3.1. Considere dois elementos $x, y \in \mathcal{H}$. Sabemos que $\varphi_p(x), \varphi_p(y) \in \mathcal{A}_p$, para todo $p$, e os $\mathcal{A}_p$ são abelianos, logo,

$$\varphi_p(x) \cdot \varphi_p(y) = \varphi_p(y) \cdot \varphi_p(x) \Rightarrow \varphi_p([x, y]) = 1.$$

Sendo assim, o subgrupo dos comutadores de $\mathcal{H}$ está contido nos núcleos $\ker \varphi_p$, para todo $p$. Portanto, $(\Delta : [\mathcal{H}, \mathcal{H}]) \geq (\Delta : \ker \varphi_p) = |\varphi_p(\Delta)| \geq p$, para cada $p = 1, 2, \ldots$, donde concluímos que $(\Delta : [\mathcal{H}, \mathcal{H}]) = \infty$.

O subgrupo $\mathcal{H}$ tem índice finito em $\Delta$ que por sua vez tem índice finito em $\Gamma$. Sendo assim, $\mathcal{H}$ tem índice finito no grupo finitamente gerado $\Gamma$, logo também é finitamente gerado. O grupo quociente $\mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ é finitamente gerado, abeliano e infinito. Pelo teorema de estrutura dos grupos abelianos finitamente gerados, existe um epimorfismo

$$\frac{\mathcal{H}}{[\mathcal{H}, \mathcal{H}]} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Seja $\psi : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}$ a composição do epimorfismo acima com a projeção canônica de $\mathcal{H}$ no quociente $\mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$. Com isto, obtemos o epimorfismo desejado.

Suponha que existe um homomorfismo $\varphi : \Delta \to \mathcal{L}$ de imagem infinita. Começamos notando que $\varphi(\Delta)$ é um subgrupo finitamente gerado de crescimento polinomial no grupo de Lie $\mathcal{L}$, logo, pelo Teorema de Tits, $\varphi(\Delta)$ é virtualmente nilpotente. Seja $N < \varphi(\Delta)$ subgrupo nilpotente de índice finito e considere a filtração $N_0 \rhd N_1 \rhd N_2 \rhd \ldots$, definida por $N_0 = N$ e $N_{j+1} = [N_j, N]$. A nilpotencia do grupo $N$ assegura que $N_j = \{e\}$ para quase todos os valores de $j$. Observe que $N_0$ tem índice finito em $\varphi(\Delta)$, mas $(\varphi(\Delta) : N_j)$ é infinito para $j$ suficientemente grande. Sendo assim, existe um $r$ tal que $N_r$ tem índice finito em $\varphi(\Delta)$, mas $(N_r : N_{r+1}) = \infty$. Nesse caso, tome $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(N_r)$. O subgrupo $\mathcal{H}$ tem índice finito em $\Delta$, logo, ele é finitamente gerado e seu índice também é finito em $\Gamma$. Provaremos que também neste caso é verdade que $\mathcal{H}/[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ é infinito, o que, seguindo o raciocínio da primeira parte dessa seção, implica a existência do epimorfismo desejado. Segue da escolha de $N_r$ que $(\Delta : \varphi^{-1}(N_{r+1})) = \infty$. Para concluir, vejamos que $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] < \varphi^{-1}(N_{r+1})$. De fato, se $x, y \in \mathcal{H} = \varphi^{-1}(N_r)$, então $\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} \in [N_r, N] = N_{r+1}$. Isto mostra que $[x, y] \in \varphi^{-1}(N_{r+1})$, como queríamos.

# Capítulo 3

# Métrica Gromov-Hausdorff

Definir uma métrica no conjunto dos espaços métricos de modo que espaços isométricos representem o mesmo ponto, ou seja, a distância entre eles deve ser zero. Sejam $(M, d)$ espaço métrico e $X, Y \subset M$ subconjuntos de $M$ munidos da métrica induzida. A maneira natural de medir a distância entre $X$ e $Y$ como subespaços de $M$, conhecida como métrica de Hausdorff, consiste em considerar o ínfimo dos $r > 0$ tais que todo ponto de $X$ está a uma distância menor ou igual a $r$ de algum ponto de $Y$ e vice-versa. De outro modo,

$$d_H(X, Y) = \inf\{r > 0 : Y \subset X(r) \ \text{ e } \ X \subset Y(r)\},$$

onde $X(r) = \cup_{x \in X} B_r(x)$, $Y(r) = \cup_{y \in Y} B_r(y)$ e $B_r(z)$ é a bola de centro $z \in M$ e raio $r$. A função $d_H$ é uma semi-métrica no espaço dos subconjuntos de $M$ e uma métrica quando restrita aos subconjuntos fechados, isto é, $d_H(X, Y) = 0$ implca $\overline{X} = \overline{Y}$. Mesmo com $X, Y \subset M$ e com $d_H(X, Y) > 0$, pode ser que eles sejam isométricos, podem estar mais próximos como espaços métricos do que como subespaços de $M$. Para suprir essa falha Gromov considerou o ínfimo das distências de Hausdorff entre as possíveis cópias isométricas de $X$ e $Y$ em qualquer espaço métrico maior. Denota-se $d_{GH}(X, Y)$ a distância de Gromov-Hausdorff entre os espaços métricos $X$ e $Y$. Equivalentemente, temos

$$\begin{aligned} d_{GH}(X, Y) = \ & \inf\{r > 0 : \ \exists \text{ métrica } d \text{ na união disjunta } X \cup Y, \text{ que estende} \\ & \qquad\qquad \text{as métricas de } X \text{ e } Y, \text{ na qual } d_H(X, Y) \leq r\}. \end{aligned}$$

Esta distância induz uma noção de convergência no espaço dos espaços métricos, que foi introduzida no trabalho do Gromov sobre grupos discretos de crescimento polinomial. Uma aplicação muito útil em Geometria Riemanniana é o Teorema de Compacidade de Gromov, o qual diz que o conjunto das variedades Riemannianas com curvatura de Ricci $\geq c$ e diâmetro $\leq D$ é relativamente compacto na métrica de Gromov-Hausdorff.

## 3.1 Métrica de Hausdorff

Os resultados que envolvem a métrica de Gromov-Hausdorff são bem mais complicados que equivalentes sobre métrica de Hausdorff. Um dos resultados desse capítulo mais importantes na demonstração do teorema principal é um critério de compacidade. No caso da métrica de Hausdorff, temos um critério de compacidade simples e muito anterior à teoria introduzida por Gromov. Seja $(\mathcal{H}^M, d_H)$ o espaço métrico dos subconjuntos fechados de $M$ munido da métrica de Hausdorff. Nesse caso, temos o seguinte teorema.

**Teorema 6** (Blaschke '1916). *Se $M$ é compacto, então $(\mathcal{H}^M, d_H)$ é compacto.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que $\mathcal{H}^M$ é completo e totalmente limitado. Seja $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}^M$. Considere

$$S = \{x \in X : \forall \text{ vizinhança } U \ni x \text{ vale } U \cap S_n \neq \emptyset \text{ para infinitos n}\}.$$

Observe que $S_n \to S$ na métrica de Hausdorff. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0$ tal que se $m, n \geq n_0$ então $d_H(S_m, S_n) < \varepsilon$. Seja $d$ a métrica de $M$. Para todo $n \geq n_0$, vejamos que $d_H(S_n, S) < 2\varepsilon$. Se $x \in S$, sabemos que $B_\varepsilon(x) \cap S_m \neq \emptyset$ para infinitos valores de $m$, logo, existe $y \in B_\varepsilon(x) \cap S_m$ para um $m \geq n_0$. Como $d_H(S_n, S_m) < \varepsilon$, segue que $d(x, S_n) < 2\varepsilon$. Por outro lado, se $x \in S_n$ então $d(x, S) < 2\varepsilon$. Com efeito, para cada $m \geq n_0$ existe $y_m \in B_\varepsilon(x) \cap S_m$. Pela compacidade de $M$ a sequência $\{y_m\}$ tem um ponto de acumulação $y \in B_{2\varepsilon}(x) \cap S$. Isto mostra que $\mathcal{H}^M$ é completo. Dado $\varepsilon > 0$, seja $A$ uma $\varepsilon$-rede finita de $M$. Afirmo que $2^A$, o conjunto dos subconjuntos de $A$, é uma $\varepsilon$-rede finita de $\mathcal{H}^M$. Para cada $X \in \mathcal{H}^M$, considere $X_A = \{a \in A : d(a, X) \leq \varepsilon\}$. É claro que $X_A \subset A$ e $d_H(X, X_A) \leq \varepsilon$, o que conclui a prova. □

## 3.2 Resultados Básicos

A definição intuitiva de Gromov de $d_{GH}$ dada acima tem algumas complicações quando são considerados espaços métricos quaisquer e mesmo em casos particulares apresenta dificuldades. Ela é apenas semi-métrica no conjunto dos espaços métricos, para que seja métrica devemos nos restringir aos espaços métricos compactos. Mesmo neste caso é difícil medir $d_{GH}(X, Y)$. Um fato que ajuda é que em vez de considerar todos os possíveis mergulhos isométricos de $X$ e $Y$ em um espaço maior, basta analisar as possíveis extensões das métricas na união disjunta $X \cup Y$. Portanto, o problema de medir reduz-se a conseguir uma boa função distância na união disjunta e provar que ela é uma métrica. Vejamos, como exemplo disso, o que ocorre na prova da desigualdade triangular.

Sejam $X_1$, $X_2$ e $X_3$ espaços métricos. A mostrar:

$$d_{GH}(X_1, X_3) \leq d_{GH}(X_1, X_2) + d_{GH}(X_2, X_3).$$

Dadas métricas $d_{12}$ e $d_{23}$ em $X_1 \cup X_2$ e $X_2 \cup X_3$, respectivamente, defina $d_{13}$ em $X_1 \cup X_3$ como sendo extensão das métricas de $X_1$ e $X_3$ tal que

$$d_{13}(x, z) = \inf\{d_{12}(x, y) + d_{23}(y, z) : z \in X_2\}, \text{ se } x \in X_1 \text{ e } z \in X_3.$$

Depois de verificado que $d_{13}$ é métrica fica claro que ela implica que $d_H(X_1, X_3) \leq d_H(X_1, X_2) + d_H(X_2, X_3)$, nas respectivas métricas. Como $d_{12}$ e $d_{23}$ são arbitrárias, segue a desigualdade triangular da métrica de Gromov-Hausdorff.

Uma ferramenta que ajuda a medir $d_{GH}$ é o conceito de correspondências. Com ela podemos provar, por exemplo, que a restrição a espaços métricos compactos faz de $d_{GH}$ uma métrica nas classes de isometrias, dentre outros corolários.

**Definição 3.2.1.** *Sejam $X$ e $Y$ conjuntos. Uma correspondência entre $X$ e $Y$ é um subconjunto $R \subset X \times Y$ do produto cartesiano tal que $R \cap (\{x\} \times Y) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$ e $R \cap (X \times \{y\}) \neq \emptyset$, para todo $y \in Y$. Se $(x, y) \in R$ dizemos que os pontos $x$ e $y$ são correspondentes.*

Para correspondências entre espaços métricos associamos um valor que só depende da variação das distâncias de pares correspondentes.

**Definição 3.2.2.** *Seja $R$ uma correspondência entre os espaços métricos $(X, d_X)$ e $(Y, d_Y)$. A distorção de $R$ é definida como*

$$disR = \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(y, y')| : (x, y), (x', y') \in R\}.$$

Se existe uma correspondência $R$ entre $X$ e $Y$ de distorção $\mathrm{dis}R = 0$, então os espaços são isométricos, basta considerar uma bijeção $f : X \to Y$ com gráfico contido em $R$. Portanto, a existência de uma correspondência com distorção pequena significa que os espaços em questão são próximos como espaços métricos. O que deixa esta afirmação ainda mais clara são as seguintes técnicas: a primeira é, sabendo que $d_{GH}(X, Y) < r$ conseguimos uma correspondência $R$ entre $X$ e $Y$ com $\mathrm{dis}R < 2r$; a outra, a partir de uma correspondência de distorção $2r$ conseguimos uma métrica $d$ na união disjunta $X \cup Y$ que estende as métricas de cada um e tal que a distância de Hausdorff entre $X$ e $Y$ nessa união disjunta seja menor que $r$. Em outras palavras:

**Teorema 7.** *Para quaisquer espaços métricos $X$ e $Y$, temos*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_R disR,$$

*onde o ínfimo é considerado sobre todas as correspondências $R$ entre $X$ e $Y$.*

*Demonstração.* Se $d_{GH}(X, Y) < r$, seja $d$ uma métrica na união disjunta $X \cup Y$ para a qual a distância de Hausdorff seja menor que $r$. Tome $R = \{(x, y) \in X \times Y : d(x, y) < r\}$. De

$d_{GH}(X,Y) < r$ concluímos que $R$ é correspondência. Além disso, segue da desigualdade triangular que dis$R < 2r$. Por outro lado, se $R$ é uma correspondência com dis$R = 2r$, defina $d$ em $X \cup Y$ como sendo $d(x,y) = \inf\{d_X(x,z) + r + d_Y(z',y) : (z,z') \in R\}$, ou seja, a menor métrica possível com distância $r$ entre pontos correspondentes. Esta função distância satisfaz a desigualdade triangular pelo fato de que dis$R < 2r$. E a distância de Hausdorff entre $X$ e $Y$ na união disjunta com a métrica $d$ ser menor ou igual a $r$ segue de $R$ ser uma correspondência. □

Como primeira consequência dessa ferramenta, vejamos que se $X, Y$ compactos então $d_{GH}(X,Y) = 0$ se, e somente se, $X$ e $Y$ são isométricos. Para isso usaremos um resultado básico sobre espaços métricos compactos.

**Lema 3.2.1.** *Seja $X$ espaço métrico compacto. Se $f : X \to X$ preserva distâncias então $f$ é sobrejetora.*

**Teorema 8.** *A distância de Gromov-Hausdorff define uma métrica finita no espaço das classes de isometria dos espaços métricos compactos.*

*Demonstração.* Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos compactos com $d_{GH}(X,Y) = 0$. Pelo teorema 7, existe uma sequência de correspondências $R_n$ entre $X$ e $Y$ com dis$R_n = \varepsilon_n \to 0$. Para cada $n$, sejam $f_n : X \to Y$ funções com gráfico em $R_n$. Sendo assim, temos

$$|d_X(x,x') - d_Y(f_n(x), f_n(x'))| < \varepsilon_n,$$

para todos $x, x' \in X$. Além disso, segue que a imagem $f_n(X)$ é uma $\varepsilon_n$-rede em $Y$. Pela compacidade de $X$, sabemos que existe subconjunto $S \subset X$ enumerável e denso. Usando o procedimento diagonal de Cantor e a compacidade de $Y$, podemos supor, a menos de passagem a subsequência, que existe $f(x) \in Y$ tal que $f_n(x) \to f(x)$, para todo $x \in S$. Sendo assim, $f$ preserva distâncias em $S$. Agora, pela compacidade de $Y$, podemos extender a função $f : S \to Y$ continuamente a $f : X \to Y$. Essa continuidade implica que $f$ preserva distâncias, ou seja, é um mergulho isométrico de $X$ em $Y$. Analogamente, conseguimos outro mergulho isométrico $g : Y \to X$ e, consequentemente, $g \circ f$ é um mergulho isométrico de $X$ em $X$. A compacidade de $X$ garante, por meio do lema 3.2.1, que $g \circ f$ é sobrejetor. Portanto, as funções $f$ e $g$ são isometrias entre $X$ e $Y$. □

Estamos interessados em convergências de espaços métricos na distância Gromov-Hausdorff, precisamente em propriedades passadas ao limite e critérios de convergência.

**Definição 3.2.3.** *Considere $\{X_n\}$ uma sequência de espaços métricos. Dizemos que $X_n$ converge para um espaço $X$ na métrica Gromov-Hausdorff se $\lim d_{GH}(X_n, X) = 0$. Nesse caso, escrevemos $X_n \underset{GH}{\to} X$.*

## 3.3 Critério de Compacidade de Gromov

**Motivação:** Sejam $X_n$ e $X$ espaços métricos compactos. Se para todo $\varepsilon > 0$ existem $S_n \subset X_n$ e $S \subset X$, $\varepsilon$-redes finitas de mesma cardinalidade para $n$ suficientemente grande, com $S_n \underset{GH}{\rightarrow} S$, então $X_n \underset{GH}{\rightarrow} X$ (isto segue do raciocínio na prova do Teorema 8). Portanto, para um critério de pré-compacidade devemos forçar a existência de $\varepsilon$-redes de cardinalidades controladas. Na verdade, na classe dos espaços métricos compactos, isto é suficiente.

**Definição 3.3.1.** *A classe de espaços métricos compactos $\mathfrak{X}$ é uniformemente compacta se ela tem duas propriedades:*

**(a)** *Os diâmetros dos espaços em $\mathfrak{X}$ são limitados por uma constante;*

**(b)** *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que cada espaço $X \in \mathfrak{X}$ possui uma $\varepsilon$-rede com cardinalidade no máximo $n$.*

**Observação 3.3.1.** *A segunda condição na definição acima tem duas equivalências úteis:*

- *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que cada espaço $X \in \mathfrak{X}$ pode ser coberto por $N$ bolas de raio $\varepsilon$;*

- *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $M = M(\varepsilon)$ tal que em cada espaço $X \in \mathfrak{X}$ existem no máximo $M$ bolas disjuntas de raio $\varepsilon$.*

**Teorema 9.** *Toda classe uniformemente compacta $\mathfrak{X}$ de espaços métricos compactos possui sequência convergente na métrica Gromov-Hausdorff.*

*Demonstração.* Considere $\{X_n\}$ sequência em $\mathfrak{X}$ e sejam $D > 0$ constante que limita os diâmetros e $N(\varepsilon)$ a cardinalidade das $\varepsilon$-redes. Para cada $n = 1, 2, \dots$ considere $S_n = \{x_{i,n}\}_{i=1}^{\infty} \subset X_n$ cujos $N(1)$ primeiros termos formam uma 1-rede, os próximos $N(1/2)$ formam uma $(1/2)$-rede, depois uma $(1/3)$-rede e assim sucessivamente. A menos de passagem a subsequência, podemos supor que

$$\{d_n(x_{i,n}, x_{j,n})\}_n \text{ converge para todo par } (i, j).$$

Tome $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ um conjunto enumerável e defina em $X$ a função distância $d(x_i, x_j) = \lim d_n(x_{i,n}, x_{j,n})$. Seja $\overline{X}$ o completamento do quociente de $X$ pela função distância $d$. Para cada $x_i \in X$ a sua classe em $\overline{X}$ é denotada por $\overline{x_i}$. Afirmo que $X_n$ converge para o compacto $\overline{X}$ na métrica Gromov-Hausdorff. O espaço métrico $\overline{X}$ é completo e cada

$$S^{(k)} = \{\overline{x_i} : 1 \leq i \leq N(1) + N(1/2) + \dots + N(1/k)\}$$

é uma $(1/k)$-rede, o que verifica que $\overline{X}$ é compacto. Além disso, as $(1/k)$-redes

$$S_n^{(k)} = \{x_{i,n} : 1 \leq i \leq N(1) + N(1/2) + \dots + N(1/k)\}$$

convergem para $S^{(k)}$. Portanto, $X_n \underset{GH}{\rightarrow} \overline{X}$, como queríamos. $\square$

## 3.4 Convergência de Gromov-Hausdorff Centrada

Na seção anterior nos restringimos a espaços métricos compactos para que a distância introduzida fosse uma métrica. Aqui vamos resolver esse problema redefinindo a distância para espaços que não sejam compactos. Nesse caso a distância é considerada a partir de um ponto fixo em cada espaço, que pode ser pensado como uma origem. Nessa seção, representaremos um espaço métrico $X$ por um par $(X, x)$, onde $x \in X$ é a origem de $X$.

**Definição 3.4.1.** *Sejam $(X, x)$ e $(Y, y)$ espaços métricos. A distância de Gromov-Hausdorff entre estes espaços, denotada por $d_{GH}((X, x), (Y, y))$, é definida como o ínfimo dos valores $r > 0$ para os quais existe uma métrica $d$ na união disjunta $X \cup Y$ que estende as métricas de cada espaço e satisfazendo:*

$$d(x, y) < r, \quad B_{\frac{1}{r}}(y) \subset X(r) \text{ e } B_{\frac{1}{r}}(x) \subset Y(r),$$

*onde $B_{\frac{1}{r}}(x)$ é a bola centrada em $x$ de raio $1/r$ e $X(r) = \cup_{x' \in X} B_r(x')$.*

Essa definição pode não parecer muito conveniente, mas restrição ao caso $d_{GH} = 0$ dispensa qualquer dúvida. De fato, dois espaços métricos $(X, x)$ e $(Y, y)$ satisfazem $d_{GH}((X, x), (Y, y)) = 0$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ e $R > 0$ existir uma métrica $d$ na união disjunta $X \cup Y$ na qual, $d(x, y) < \varepsilon$ e $B_R(x) \subset Y(\varepsilon)$ e $B_R(y) \subset X(\varepsilon)$.

Um espaço métrico $X$ é próprio se cada bola fechada em $X$ é compacta. Para esse tipo de espaço temos um análogo do critério de pré-compacidade feito para classes de espaços métricos compactos.

**Teorema 10** (Critério de Precompacidade)**.** *Seja $(X_n, x_n)$ sequência de espaços métricos próprios. Se para cada $r \geq 0$ a família $\{B_n(r)\}_n$ é uniformemente compacta, então existe uma subsequência $(X_{n_k}, x_{n_k})$, que converge para um espaço métrico próprio $(Y, y)$.*

Este resultados é uma consequência do teorema 9. De fato, aquele resultado garante que as bolas $B_n(r)$ convergem em uma subsequência para um espaço métrico compacto $\widetilde{B}(r)$. Tomando $r = r_j$ maiores e passando a subsequências mais refinadas conseguimos convergência $B_{n_k}(r_j) \underset{GH}{\longrightarrow} \widetilde{B}(r_j)$, em cada conjunto $\widetilde{B}(r_1) \subset \widetilde{B}(r_2) \subset \ldots$ Sendo assim, conseguimos convergência na métrica Gromov-Hausdorff de uma subsequência de $(X_n, x_n)$ para um espaço métrico próprio.

Considere $(X_n, x_n) \underset{GH}{\longrightarrow} (Y, y)$. Então, existe uma sequência de métricas $d_n$ na união disjunta $X_n \cup Y$, tal que para cada $\varepsilon > 0$ e $r \geq 0$, temos

$$d_n(x_n, y) < \varepsilon, \quad B_r(x_n) \subset Y(\varepsilon) \text{ e } B_r(y) \subset X(\varepsilon),$$

para quase todo $n$, onde $B_r(x_n)$ é a bola centrada em $x_n$ e raio $r$ em $X_n$. Fixadas essas métricas passamos a ter uma convergência definida, denotada por

$$(X_n, x_n; d_n) \underset{GH}{\rightrightarrows} (Y, y).$$

Fixada a convergência definida, fazem sentido as noções de convergência de sequências $x'_n \in X_n$ e de aplicações $f_n : X_n \to X_n$. Sejam $x'_n \in X_n$ e $y' \in Y$, definimos

$$x'_n \to y' \text{ se, e somente se, } d_n(x'_n, y') \to 0.$$

E as aplicações $f_n : X_n \to X_n$ convergem para $f : Y \to Y$ se para todo par $r \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(r, \varepsilon)$ tal que para quase todo $n$ temos

$$x' \in B_r(x_n) \subset X_n, \quad y' \in B_r(y) \subset Y \text{ e } d_n(x', y') \leq \delta \Rightarrow d_n(f_n(x'), f(y')) \leq \varepsilon.$$

Um resultado nessa direção que é fundamental na demonstração do Teorema de Gromov é o seguinte lema.

**Teorema 11** (Lema das Isometrias)**.** *Seja $(X_n, x_n; d_n) \Rightarrow (Y, y)$ com $Y$ próprio. Suponha que $f_n : X_n \to X_n$ é uma sequência de isometrias tal que $d_n(x_n, f_n(x_n)) \leq C$, onde $C$ é uma constante. Então existe subsequência $f_{n_k}$ das aplicações que converge para uma isometria $f : Y \to Y$.*

O fato $d_n(x_n, f_n(x_n)) \leq C$ é necessário para a prova funcionar, pois $x_n \to y$ implica que devemos ter $f_{n_k}(x_{n_k}) \to f(y)$, se $f_{n_k}$ converge a $f : Y \to Y$, logo, os pontos $f_{n_k}(x_{n_k})$ devem ficar uniformemente próximos dos respectivos $x_{n_k}$.

**Corolário 12.** *Se cada espaço $(X_n, x_n)$ é homogêneo e converge na métrica Gromov-Hausdorff, então o limite $(Y, y)$ também é homogêneo.*

*Demonstração.* Dado $y' \in Y$, seja $x'_n$ sequência em $X_n$ tal que $\lim x'_n = y'$. Para cada $n$, pela homogeneidade de $X_n$, considere uma isometria $f_n : X_n \to X_n$ com $f_n(x_n) = x'_n$. Segue do Lema das Isometrias que as $f_n$ convergem para uma isometria $f : Y \to Y$. A definição de convergência de aplicações implica que $f(y) = y'$. $\square$

# Capítulo 4

# Demonstração do Teorema

## 4.1 Regularidade no Crescimento das Bolas

Sejam $\Gamma$ grupo finitamente gerado, $d$ a métrica de palavras associada a um conjunto fixo de geradores e $\tau = cres(\Gamma)$. O primeiro passo da demonstração do Teorema de Gromov diz respeito à regularidade do crescimento das bolas em $\Gamma$.

Pela definição do crescimento de $\Gamma$, temos $\log b(2^k) \leq C + k\tau \log 2$, para $k$ suficientemente grande. Sendo assim,

$$\log b(2^k) - j(\tau + 1) \log 2 \leq C + (\tau(k-j) - j) \log 2.$$

Dado $\varepsilon > 0$, aplicamos novamente a definição do crescimento de $\Gamma$ para inferir que $b(2^{k-j}) \geq e^{2C} 2^{(\tau-\varepsilon)(k-j)}$, para $k - j$ grande. Sendo assim, se escolhemos $\varepsilon$ adequado, obtemos

$$\log b(2^{k-j}) \geq 2C + (\tau - \varepsilon)(k-j) \log 2 \geq C + (\tau(k-j) - j) \log 2.$$

Portanto, as duas desigualdades obtidas fornecem uma sequência $\{2^{k_n}\} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ com $\lim k_n = \infty$ satisfazendo

$$\log b(2^{-j} r_n) \geq \log b(r_n) - j(\tau + 1) \log 2, \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

Afirmo que esta sequência também cumpre

$$\log b(2^j r_n) \leq \log b(r_n) + 16^{j+1}(\tau + 1), \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

Essas desigualdades são chamadas relações de regularidade de $\Gamma$. Para checar a segunda, provaremos o seguinte lema:

**Lema 4.1.1.** *Seja $\Gamma$ grupo finitamente gerado munido da métrica de palavras $d$ associada a um conjunto fixo de geradores. Se $b(r)$ denota a cardinalidade da bola $B(r)$ de raio $r$ em $\Gamma$, então*

$$\log b(2^j r) \leq 16^j \left( \log b(r) - \log b\left(\frac{r}{4}\right) \right) + \log b\left(\frac{r}{4}\right).$$

*Demonstração.* Seja $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ conjunto maximal $(2r+1)$-separado em $B(3r)$. As bolas centradas em $\alpha_i$ de raio $r$, $B_r(\alpha_i)$ são disjuntas e estão contidas em $B(4r)$, logo, existem no máximo $b(4r)/b(r)$ delas. As bolas $B_{2r}(\alpha_i)$ cobrem $B(3r)$ e, pelas propriedades de conectividade de $\Gamma$, as $k$ bolas $B_{4r}(\alpha_i)$ cobrem $B(5r)$. Com isto, fica provado que $b(5r) \leq k \cdot b(4r)$ e podemos concluir que

$$b(5r) \leq \frac{(b(4r))^2}{b(r)}.$$

Para o fim dessa demonstração, denotamos $l(r) = \log b(r)$. Na nova notação, a relação acima se escreve como $l(5r) \leq 2l(4r) - l(r)$. Quando $r$ é multiplo de 4, podemos aplicá-la para $5r/4$, obtendo

$$l(6r) \leq l\left(5 \cdot \frac{5r}{4}\right) \leq 2l(5r) - l(r) \leq 4l(4r) - 3l(r).$$

E daí, com esta última para $6r/4$ obtemos

$$l(8r) \leq l\left(6 \cdot \frac{6r}{4}\right) \leq 4l\left(\frac{6r}{4}\right) - 3l\left(\frac{6r}{4}\right) \leq 16l(4r) - 15l(r).$$

Quando $r$ é multiplo de 16, a equação acima fornece

$$l(2r) = l(8 \cdot \frac{r}{4}) \leq 16l(r) - 15l\left(\frac{r}{4}\right) = 16\left(l(r) - l\left(\frac{r}{4}\right)\right) + l\left(\frac{r}{4}\right).$$

Aplicando esta desigualdade $j$ vezes obtemos a desigualdade desejada. $\square$

A desigualdade fornecida pelo lema juntamente com a primeira relação de regularidade restrita a $j = 2$, para cada $n$, fornecem

$$\log b(2^j r_n) \leq 16^{j+1}(\tau + 1) + \log b\left(\frac{r}{4}\right), \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

O que prova a segunda desigualdade.

## 4.2 Construção do Espaço $(Y, y)$ de Gromov

Seja $r_n$ a sequência obtida na seção anterior, que cumpre as relações de regularidade. Para cada $n$ consideramos o espaço métrico $\Gamma_n = \Gamma$ com uma nova métrica $r_n^{-1}d$. Nessa seção, consideramos os espaços métricos $\Gamma_n$ centrados em $e_n = e$, o elemento neutro do grupo $\Gamma$. Veremos que a menos de passagem a subsequência, podemos supor que

$$(\Gamma_n, e_n) \underset{GH}{\longrightarrow} (Y, y),$$

onde $(Y, y)$ é um espaço métrico próprio e homogêneo, além de outras boas propriedades.

Para tanto, vejamos que as famílias das $r$ bolas de $\Gamma_n$ são uniformemente compactas para todo $r \geq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, sejam $A$ subconjunto $2\varepsilon$-separado da bola $B_r(e_n) \subset \Gamma_n$ e $b(r)$ como na seção anterior. Sendo assim, as bolas centradas nos pontos de $A$ de raio $\varepsilon$ medido na métrica $d_n$ são disjuntas e estão contidas em $B_{r+\varepsilon}(e_n)$, logo

$$|A| \leq \frac{b(r_n(r+\varepsilon))}{b(r_n\varepsilon)}.$$

Para concluir é suficiente verificar que para todo $r \geq 0$ existe constante $C_r > 0$ tal que

$$\frac{b(r_n(r+\varepsilon))}{b(r_n\varepsilon)} \leq C_r, \text{ para todo } n = 1, 2, \ldots$$

Para tanto, estudaremos o seguinte conjunto associado

$$\{[\log b(r_n(r+\varepsilon)) - \log b(r_n)] + [\log b(r_n) - \log b(r_n\varepsilon)] : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Fixados $r \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $r + \varepsilon \leq 2^k$ e $\varepsilon \geq 2^{-k}$. Se $n \geq k$, as relações de regularidade do crescimento das bolas de $\Gamma$ implicam

$$\log b(r_n(r+\varepsilon)) - \log b(r_n) \leq \log b(2^k r_n) - \log b(r_n) \leq 16^{k+1}(\tau + 1)$$

$$\log b(r_n) - \log b(r_n\varepsilon) \leq \log b(r_n) - \log b(2^{-k} r_n) \leq k(\tau + 1) \log 2,$$

onde $\tau$ é o crescimento de $\Gamma$. Como há finitos $n < k$ e cada espaço $\Gamma_n$ é próprio, isto conclui o argumento. Pelo Critério de Pré-compacidade de Gromov e pelo corolário do Lema de Isometria, fica provado o seguinte teorema:

**Teorema 13.** *Seja $\Gamma$ grupo finitamente gerado de crescimento polinomial munido da métrica das palavras $d$. Então existe uma sequência $r_n \to \infty$ com a seguinte propriedade. Os espaços métricos $\Gamma_n = (\Gamma, e_n)$, com a métrica $d_n = r_n^{-1} d$, convergem na métrica Gromov-Hausdorff para um espaço métrico próprio e homogêneo $(Y, y)$.*

O espaço limite $Y$ tem outras duas propriedades que são importantes na prova, ele tem dimensão finita e quaisquer dois pontos dele podem ser ligados por caminhos que aproximam a distância entre eles.

**Definição 4.2.1.** *Dizemos que um espaço métrico $M$ tem dimensão finita se existe um $l > 0$ tal que o conteúdo de dimensão $l$ de qualquer compacto de $M$ é nulo, ou seja, para qualquer compacto $K \subset M$*

$$\inf \left\{ \sum r_i^l : \text{ existe uma cobertura de } K \text{ por bolas } B_i \text{ de raio } r_i > 0 \right\} = 0.$$

Seja $k$ a quantidade máxima de bolas disjuntas de raio $2^{-j}r_n$ que podem existir em uma bola de raio $r_n$ de $\Gamma$, com $j \leq n$. É claro que $k \cdot b(2^{-j}r_n) \leq b(r_n)$. Pela primeira relação de regularidade, temos

$$b(r_n) \leq 2^{j(\tau+1)} b(2^{-j}r_n).$$

Sendo assim, $k \leq 2^{j(\tau+1)}$, o que mostra que podemos cobrir uma bola de raio $r_n/2$ em $\Gamma$ com $2^{j(\tau+1)}$ bolas de raio $2^{-j+1}r_n$, com $j \leq n$. Passando para a linguagem dos espaços $\Gamma_n$, fica provado que a bola de raio $1/2$ em $\Gamma_n$ pode ser coberta por $2^{j(\tau+1)}$ bolas de raio $2^{-j+1}$, para cada $j \leq n$. Esta propriedade passa ao espaço $Y$ pela convergência na métrica Gromov-Hausdorff, logo, podemos cobrir uma bola em $Y$ de raio $1/2$ com $2^{j(\tau+1)}$ bolas de raio $2^{-j+1}$, para qualquer $j = 1, 2, \ldots$. Portanto, $Y$ tem dimensão finita.

Seja $\delta$ a métrica do espaço $Y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, fixe uma métrica $\delta_n$ na união disjunta $\Gamma_n \cup Y$ que realiza a convergência definida $(\Gamma_n, e_n; \delta_n) \underset{GH}{\rightrightarrows} (Y, y)$. Uma boa propriedade da convergência de Gromov-Hausdorff é que o limite herda as propriedades que podem ser expressas por conjuntos finitos. Sejam $\alpha$ e $\beta \in Y$ e sequências $x_n, y_n \in \Gamma_n$ tais que $\lim x_n = \alpha$ e $\lim y_n = \beta$. Para cada $n$, pela conectividade de $\Gamma$, existe $z_n \in \Gamma_n$ satisfazendo

$$d_n(x_n, z_n) \leq \frac{1}{2} d_n(x_n, y_n) + \frac{1}{r_n} \text{ e } d_n(z_n, y_n) \leq \frac{1}{2} d_n(x_n, y_n) + \frac{1}{r_n}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, se $n$ é suficientemente grande, os pontos $z_n$ ficam na bola de centro $\alpha$ e raio $\frac{1}{2}[\delta(\alpha, \beta) + \varepsilon]$ da união disjunta $\Gamma_n \cup Y$, pois a desigualdade triangular com a propriedade dos $z_n$, fornecem

$$\delta_n(\alpha, z_n) \leq \frac{3}{2} \delta_n(\alpha, x_n) + \frac{1}{2} \delta(\alpha, \beta) + \frac{1}{2} \delta_n(\beta, y_n) + \frac{1}{r_n}.$$

Sendo assim, a menos de passagem a subsequência, podemos supor que $z_n$ converge a um ponto $\omega \in Y$ na bola centrada em $\alpha$ de raio $\frac{1}{2}\delta(\alpha, \beta) + \varepsilon$. Além disso, $\omega$ também está na bola de $Y$ centrada em $\beta$ com mesmo raio. Com isto, fica provada a seguinte proposição:

**Proposição 1.** *Seja $(Y, y)$ o espaço métrico de Gromov. Dados $\alpha, \beta \in Y$ e $\varepsilon > 0$, existe $\omega \in Y$ tal que*

$$\delta(\alpha, \omega) \leq \frac{1}{2} \delta(\alpha, \beta) + \varepsilon \quad e \quad \delta(\beta, \omega) \leq \frac{1}{2} \delta(\alpha, \beta) + \varepsilon.$$

Todo espaço métrico completo com esta propriedade admite caminhos que aproximam a distância entre quaisquer dois de seus pontos, em particular são conexos e localmente conexos. A idéia da contrução desses caminhos é a seguinte: dados $\alpha, \beta \in Y$, defina $\gamma : [0, 1] \to Y$ começando por $\gamma(0) = \alpha$ e $\gamma(1) = \beta$. Depois tome $\gamma(1/2)$ nas bolas de raio $\frac{1}{2}\delta(\alpha, \beta) + \frac{\varepsilon}{2}$ centradas em $\alpha$ e em $\beta$. Para $\gamma(1/4)$ procedemos do mesmo modo com $\gamma(1/2)$ no lugar de $\beta$ e $\frac{\varepsilon}{4}$ em vez de $\frac{\varepsilon}{2}$. Analogamente para $\gamma(3/4)$. Desde modo definimos $\gamma$ nos pontos da forma $k/2^k$ e extendemos por continuidade para obter o caminho desejado.

## 4.3 Isometrias de $Y$

O Lema das Isometrias é uma forte ferramenta para construir isometrias de $Y$, pois este espaço foi obtido como um limite na métrica Gromov-Hausdorff. Já sabemos que $Y$ tem dimensão finita, é próprio, homogêneo, conexo e localmente conexo, logo, pelo Teorema de Montgomery-Zippin, o grupo das isometrias de $Y$ é um grupo de Lie $\mathcal{L}$ com finitas componentes conexas. A fim de usar o Lema Algébrico invocamos, vamos usar o Lema das Isometrias para construir homomorfismos de subgrupos de $\Gamma$ em $\mathcal{L}$.

**Lema 4.3.1.** *Sejam $\gamma_n \in \Gamma$ tais que a sequência $\{r_n^{-1}|\gamma_n|\}$ é limitada. Para cada $n$, considere $\gamma_n : \Gamma_n \to \Gamma_n$ definida como $\gamma_n(\alpha) = \gamma_n\alpha$. Então, existe uma isometria $l \in L$ que é limite de uma subsequência $\gamma_{n_k}$. Em particular, quando $\gamma_n = \gamma$ denotamos esta isometria obtida por $l_\gamma$.*

Para aplicar o corolário do Lema Algébrico precisamos mostrar que todo $\Gamma' < \Gamma$ finitamente gerado e infinito possui um subgrupo $\Delta$ de índice finito em $\Gamma'$ que admite homomorfismos com imagens arbitrariamente grandes para $\mathcal{L}$, ou que seja abeliano. Pelo lema 4.3.1, sempre podemos construir o homomorfismo $\Gamma' \to \mathcal{L}$ que associa a cada $\gamma \in \Gamma'$ a isometria correspondente $l_\gamma$. Se a imagem desse homomorfismo é infinita ou, equivalentemente, seu núcleo, $\Gamma''$, tem índice infinito, já estamos nas hipóteses do Lema Algébrico. Resta analisar o caso em que o índice de $\Gamma''$ em $\Gamma'$ é finito, para tanto, vamos entender melhor esse núcleo no caso em que $(\Gamma'') < \infty$.

O grupo $\Gamma'$ é finitamente gerado e o índice de $\Gamma'$ em $\Gamma''$ é finito, logo, $\Gamma''$ também é finitamente gerado, seja $\Gamma'' = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle$. Observe que $\gamma \in \Gamma''$ se, e somente se, $l_\gamma$ é a identidade de $Y$, o que equivale a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(\gamma x_n, x_n)}{r_n} = \lim_{n\to\infty} d_n(\gamma x_n, x_n) = 0,$$

para toda sequência convergente $x_n \in \Gamma_n$. Escolha $\alpha_n \in \Gamma$ tal que $|\alpha_n| \leq r_n$ e

$$d(\gamma\alpha_n, \alpha_n) = \sup_\beta d(\gamma\beta, \beta),$$

onde $\beta$ varia sobre todo os pontos da bola raio $r_n$ centrada na origem de $\Gamma$. Isso motiva as seguintes definições

**Definição 4.3.1.** *Seja $G$ um grupo finitamente gerado munido da métrica das palavra $d$. Para cada $r \geq 0$, definimos*

$$\mathcal{D}(\gamma, r) = \sup_{\beta \in B_r} d(\gamma\beta, \beta),$$

*onde $B_r \in G$ é a bola de centro na identidade de $G$ e raio $r$. Sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in G$ e $G' = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle < G$ o subgrupo gerado por esses elementos. Denotamos:*

$$\mathcal{D}(G', r) = \sup_{1\leq j\leq k} \mathcal{D}(\gamma_j, r).$$

Com esta notação, o núcleo do homomorfismo $\Gamma' \to \mathcal{L}$ é formado pelos pontos $\gamma \in \Gamma'$ que satisfazem $\lim r_n^{-1} D(\gamma, r_n) = 0$, em particular, isso vale para os geradores $\gamma_i$ de $\Gamma''$. Portanto,

$$\lim_{n \to \infty} r_n^{-1} \mathcal{D}(\Gamma'', r_n) = 0. \tag{4.1}$$

A prova agora se divide em dois casos, cobertos pelas duas afirmações a seguir.

**Afirmação 4.3.1.** *Se $\{\mathcal{D}(\Gamma'', r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ é limitado o centro de $\Gamma''$ tem índice finito.*

*Demonstração.* Suponha que cada letra $\gamma_j$ de $\Gamma''$ tem essa variação $\mathcal{D}(\gamma_j, r)$ limitada em $r$, isso significa que existe uma constante $C > 0$ tal que $|\beta^{-1}\gamma_j\beta| \leq C$, para todo $\beta \in \Gamma$ e $1 \leq j \leq k$. Sendo assim, cada $\gamma_j$ tem finitos conjugados em $\Gamma$, em particular, finitos conjugados em $\Gamma''$. Por outro lado, as classes laterais à direita do centro de $\gamma_j$ em $\Gamma''$ estão em bijeção com os conjugados desse elemento, logo, $Z(\gamma_j)$, o centro de $\gamma_j$ em $\Gamma''$, tem índice finito em $\Gamma''$. Isto pode ser visto pela correspondência $\beta^{-1}\gamma_j\beta \leftrightarrow Z(\gamma_j)\beta$. Analogamente,

$$(Z(\gamma_1) \cap \ldots \cap Z(\gamma_i) : Z(\gamma_1) \cap \ldots \cap Z(\gamma_{i+1})) < \infty, \text{ para } 1 \leq i \leq k-1.$$

Portanto, $(\Gamma'' : Z(\gamma_1) \cap \ldots \cap Z(\gamma_k)) < \infty$, o que conclui o argumento, pois o centro de $\Gamma''$ é exatamente $Z(\gamma_1) \cap \ldots \cap Z(\gamma_k)$. Nesse caso, $\Delta$ é essa interseção. □

**Afirmação 4.3.2.** *Supondo que o conjunto mencionado na afirmação acima é ilimitado conseguimos construir novos homomorfismos de $\Gamma''$ em $\mathcal{L}$, cujas imagens possuem elementos de ordem arbitrariamente grande em $\mathcal{L}$.*

*Demonstração.* Usamos o Lema de localização, 1.3.2, para verificar que os homomorfismos que construiremos têm elementos de ordem alta na imagem. Começamos vendo que a condição 4.1 implica que para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe uma sequência $\alpha_n = \alpha_n(\varepsilon) \in \Gamma$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} r_n^{-1} \mathcal{D}(\alpha_n^{-1}\Gamma''\alpha_n, r_n) = \varepsilon. \tag{4.2}$$

De fato, para todo $\alpha \in \Gamma$, $\beta \in B_r$ e $1 \leq j \leq k$, temos

$$|\beta^{-1}(\alpha^{-1}\gamma_j\alpha\beta)| = |(\alpha\beta)^{-1}\gamma_j(\alpha\beta)| \leq \mathcal{D}(\Gamma'', r) + 2|\alpha|,$$

pois, pela conectividade, o produto $\alpha\beta$ pode ser reescrito como $xy$, com $x \in B_r$ e $|y| \leq |\alpha|$. Isto mostra que $\mathcal{D}(\alpha^{-1}\Gamma''\alpha, r) \leq \mathcal{D}(\Gamma'', r) + 2|\alpha|$. Analogamente, $\mathcal{D}(\Gamma'', r) \leq \mathcal{D}(\alpha^{-1}\Gamma''\alpha, r) + 2|\alpha|$. Em particular, $|\mathcal{D}(\alpha^{-1}\Gamma''\alpha, r) - \mathcal{D}(\Gamma'', r)| \leq 2$, se $|\alpha| = 1$. Como $\mathcal{D}(\Gamma'', r_n)$ é ilimitada em $n$, para cada $n$, existe $\mu_n \in \Gamma$ tal que $\mathcal{D}(\mu_n^{-1}\Gamma''\mu_n, r_n) > \varepsilon r_n$. Além disso, sabemos que $\mathcal{D}(\Gamma'', r_n) < \varepsilon r_n$, para $n$ grande. Sejam $\mu_n = \lambda_1 \ldots \lambda_l$, com $|\lambda_j| = 1$, e $\beta_j = \lambda_1 \ldots \lambda_j$, para $1 \leq j \leq l$, e $\beta_0 = e$ a identidade de $\Gamma$. Com isto, o que temos pode ser escrito como

$$\mathcal{D}(\beta_0^{-1}\Gamma''\beta_0, r_n) < \varepsilon r_n < \mathcal{D}(\beta_l^{-1}\Gamma''\beta_l, r_n) \text{ e } |\mathcal{D}(\beta_j^{-1}\Gamma''\beta_j, r_n) - \mathcal{D}(\beta_{j+1}^{-1}\Gamma''\beta_{j+1}, r_n)| \leq 2,$$

Logo, $|\mathcal{D}(\beta_s^{-1}\Gamma''\beta_s, r_i) - \varepsilon r_i| \leq 2$ para algum $s$. Tome $\alpha_n$ como sendo este $\beta_s$ obtido. É claro que esta sequência satisfaz o limite em 4.2.

Para cada $j = 1, \ldots, k$ e $n \in \mathbb{N}$, seja $\gamma_{jn} : \Gamma_n \to \Gamma_n$ a multiplicação à esquerda por $\alpha_n^{-1}\gamma_j\alpha_n$. Pela condição 4.2, $d_n(\gamma_{jn}(e_n), e_n) = r_n^{-1}|\alpha_n^{-1}\gamma_j\alpha_n| \leq 2\varepsilon$, para quase todo $n$. Pelo Lema das Isometrias, existe $l_j \in \mathcal{L}$ obtido como limite de uma subsequência de $\gamma_{jn}$, e, com isso, obtemos um novo homomorfismo $A(\varepsilon) : \Gamma'' \to L$. Suponha, sem perda de generalidade, que

$$\lim_{n\to\infty} r_n^{-1}\mathcal{D}(\alpha_n^{-1}\gamma_1\alpha_n, r_n) = \varepsilon,$$

que pode ser reescrito como

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sup_{x\in B_1(e_n)} d_n(\alpha_n^{-1}\gamma_1\alpha_n x, x) \right) = \varepsilon.$$

Por outro lado, pela convergência $\gamma_{1n} \to l_1$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B_1(e_n)} d_n(\alpha_n^{-1}\gamma_1\alpha_n x, x) = \sup_{u\in B_1(y)} \delta(l_1(u), u),$$

onde $\delta$ é a métrica de $Y$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe um homomorfismo $\Gamma'' \to L$ com um elemento $l_1$ na imagem que satisfaz:

$$\delta(l_1(u), u) \leq \varepsilon, \text{ para todo } u \in B_1(y).$$

Esses elementos $l_1 \in \mathcal{L}$ têm ordens arbitrariamente grandes pelo lema de localização, 1.3.2, o que encerra a prova do Teorema de Gromov. $\square$

# Bibliografia


[1] D. Burago, Y. Burago e S. Ivanov. *Course in metric geometry.*

[2] M. Gromov. *Groups of polinomial growth and expanding maps.* Publ. Math. IHES **53** 53–78, (1981).

[3] J. Milnor. *A note on curvature and fundamental group.* J. Differential Geometry **2** 1–7, (1968)

[4] J. Milnor. *Growth of finitely generated solvable groups.* J. Differential Geometry **2** 447-449, (1968)

[5] J. Tits. *Free subgroups in linear groups.* J. Algebra **20** 250–270, (1972)

[6] J. Wolf. *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds.* J. Differential Geometry **2** 421–446, (1968).