1 O que é um produto-estrela?

Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear

$$\{\cdot,\cdot\} : C^{\infty}(M) \times C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

satisfazendo

(1) $\{f,g\} = -\{g,f\}$ (antissimetria)
(2) $\{f,gh\} = \{f,g\}h + \{f,h\}g$ (regra de Leibniz)
(3) $\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$ (identidade de Jacobi)

para quaisquer funções $f,g,h \in C^{\infty}(M)$ é dita um produto (ou colchete, ou estrutura) de Poisson sobre M.

Munida de tal estrutura, M é dita uma variedade de Poisson.

Uma estrutura de Poisson em M é determinada por um 2-tensor contravariante antissimétrico $P \in \Gamma\left(M, \wedge^2 TM\right)$ pondo-se

$$\{f,g\} = P(df, dg).$$

Localmente (ou seja, dada um sistema de coordenadas locais $\varphi = \left(x^1, \cdots, x^n\right) : U \subset M \to \mathbb{R}^n$), temos

$$P = P^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\nu}},$$

onde

$$P^{\mu\nu} = -P^{\nu\mu}.$$

A expressão local do colchete de Poisson fica então

$$\{f,g\} = P^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial g}{\partial x^{\nu}}.$$

[bem entendido, $\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}(x)$ significa $\partial_{\mu}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(x))$]

Identificando matrizes 1×1 com escalares, podemos ainda escrever

$$\{f,g\} = \widetilde{\left[\frac{\partial f}{\partial x^{i}}\right]}\left[P^{ij}\right]\left[\frac{\partial g}{\partial x^{j}}\right],$$

onde $\left[\frac{\partial h}{\partial x^j}\right]$ é a função-vetor-coluna das derivadas parciais da função h e o til responde pela transposição de matrizes.

Exemplo 1 *Escreva* $x = \left(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n\right)$ *para rotular as coordenadas de* $\mathbb{R}^{2n}$.

A estrutura de Poisson canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ *é dada por*

$$\{f,g\} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial q^k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)$$

ou, equivalentemente,

$$\{f,g\} = Jf \cdot J \cdot \widetilde{Jg},$$

onde $Jh(x) \in M_{\mathbb{R}}(1 \times n)$ *é a matriz jacobiana da função* h *no ponto* $x \in \mathbb{R}^{2n}$*,* *e*

$$J = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{n\times n} & \mathbb{I}_{n\times n} \\ -\mathbb{I}_{n\times n} & \mathbb{O}_{n\times n} \end{pmatrix}_{2n\times 2n}.$$

Um tipo particular de estrutura de Poisson é aquele que advém de uma estrutura simplética em M, i.e., uma 2-forma fechada e não- degenerada globalmente definida em M.

Localmente, podemos escrever

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu},$$

com

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}.$$

Uma 2-forma ω não-degenerada equipa M com um isomorfismo entre os fibrados tangente e cotangente da variedade M, dado por

$$\begin{array}{cccc} \Omega : & TM & \longrightarrow & T^*M \\ & (x,X) & \mapsto & \Omega_X = (x, \omega(x)(X,\cdot)) \end{array}.$$

Restrito a fibras sobre $x \in M$, $\Omega(x) : T_xM \to T_x^*M$ é um isomorfismo linear, cuja matriz com relação às bases $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}|_x\right\}, \{dx^{\mu}|_x\}$ associadas a um mesmo sistema de coordenadas em torno de $x \in M$ é dada por

$$[\Omega(x)] = [\omega_{ij}(x)]_{n\times n}.$$

Denotaremos as entradas de sua matriz inversa por $\omega^{ij}(x)$, com índices subrescritos, donde as fórmulas

$$\omega^{\mu\lambda}\omega_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

e

$$\omega_{\mu\lambda}\omega^{\lambda\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}.$$

Não é difícil ver que os coeficientes $\omega^{\mu\nu}$ se comportam, sob mudanças de coordenadas, como componentes de um 2-tensor contravariante antissimétrico.

Isso nos permite definir um colchete antissimétrico em M pela fórmula local

$$\{f,g\} = \omega^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial g}{\partial x^{\nu}}.$$

Esse colchete claramente satisfaz a condição (2). Sendo a forma ω fechada, garantimos a satisfação da identidade de Jacobi. Com efeito, a condição $d\omega = 0$ se escreve localmente como

$$\frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial \omega_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \omega_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0.$$

Se (M,ω) é uma variedade simplética, então M tem dimensão par, igual ao posto de $[\omega_{ij}]$, ou $\left[\omega^{ij}\right]$.

Dada uma variedade de Poisson (M,P) de dimensão par, a maximalidade do posto de $\left[P^{ij}\right]$ é condição necessária e suficiente para que seja P uma estrutura de Poisson simplética (i.e., obtida a partir de uma estrutura simplética nos termos da discussão anterior).

Exemplo 2 *A estrutura canônica J de $\mathbb{R}^{2n}$ é claramente simplética.*

Exemplo 3 *Seja M uma variedade diferenciável qualquer. Seu fibrado cotangente T^*M admite uma estrtura simplética canônica, dada em coordenadas locais $\left(q^1,\cdots,q^n,p_1,\cdots,p_n\right)$ por*

$$\omega = dq^\mu \wedge dp_\mu = d\left(q^\mu dp_\mu\right).$$

Daí se pode obter uma estrutura de Poisson (simplética) para o fibrado cotangente de qualquer variedade diferenciável.

Uma última advertência antes de prosseguirmos. O isomorfismo de fibrados associados $\Omega : TM \to T^*M$ descrito acima induz um $C^\infty(M)$ −isomorfismo dos respectivos $C^\infty(M)$ −módulos de seções, $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ e $\Omega(M) = \Gamma(T^*M)$,

$$\mathfrak{X}(M) \quad \underset{\flat}{\overset{\sharp}{\rightleftarrows}} \quad \Omega(M) \ .$$

Localmente, dados $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(U)$ e $\alpha = \alpha_\mu dx^\mu \in \Omega(U)$, temos

$$X^\flat = \omega_{\mu\nu} X^\nu dx^\mu \in \Omega(U)$$

e

$$\alpha^\sharp = \omega^{\mu\nu}\alpha_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(U).$$

Isso sugere escrevermos $X_\mu = \omega_{\mu\nu} X^\nu$ (componente de uma 1-forma) e $\alpha^\mu = \omega^{\mu\nu}\alpha_\nu$ (componente de um campo vetorial). Estendendo esta convenção notacional de maneira razoável, dado uma componente $T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_m}$ de um (k,m)-tensor $T \in \mathfrak{X}(U)^{\otimes^k} \otimes \Omega(U)^{\otimes^m}$, escreveremos doravante

$$T^{\mu_1\cdots\widehat{\mu_i}\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_m\ \mu_i} = \omega_{\mu_i\lambda} T^{\mu_1\cdots\lambda\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_m}$$

e

$$T^{\mu_1\cdots\mu_k\nu_j}_{\nu_1\cdots\widehat{\nu_j}\cdots\nu_m} = \omega^{\nu_j\rho} T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\rho\cdots\nu_m}.$$

Estamos agora em condições de responder à pergunta-título desta seção.

Seja $(M,\{\cdot,\cdot\})$ uma variedade de Poisson.

Estendamos $C^\infty(M)$ de maneira a incluir funções suaves a valores complexos.

$C^{\infty}(M)$ é uma $\mathbb{C}-$álgebra segundo duas estruturas multiplicativas: uma álgebra comutativa e associativa, segundo o produto pontual de funções $(fg)(x) = f(x)g(x)$; e uma álgebra anticomutativa e não-associativa, segundo o colchete de Poisson.

Nessas condições, enunciemos a seguinte

Definição 4 *Seja $\mathcal{O} < C^{\infty}(M)$ uma $\mathbb{C}-$subálgebra (fechada em relação a $\cdot$ e $\{\cdot,\cdot\}$).*

Um produto-estrela $\star$ em M é uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \star: & \mathcal{O}[[\hbar]] \times \mathcal{O}[[\hbar]] & \longrightarrow & \mathcal{O}[[\hbar]] \\ & (f(\hbar), g(\hbar)) & \mapsto & f(\hbar) \star g(\hbar) \end{array}$$

satisfazendo

(0) $f(\hbar) \star 1 = 1 \star f(\hbar) = f(\hbar)$ *(1 é a unidade segundo $\star$)*

(1) $f(\hbar) \star (g(\hbar) \star h(\hbar)) = (f(\hbar) \star g(\hbar)) \star h(\hbar)$ *(associatividade)*

(2) $f, g \in \mathcal{O} \;\Rightarrow\; f \star g = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(f,g)\,\hbar^k$, *onde*

(2.1) $D_0(f,g) = fg$ *($\star$ deforma o produto pontual $\cdot$)*

(2.2) $D_1(f,g) - D_1(g,f) = i\{f,g\}$ *($\star$ deforma o colchete de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$), i.e.,*

$$[f,g]_{\star} \equiv f \star g - g \star f = i\hbar\{f,g\} + O\left(\hbar^2\right) \qquad (1)$$

(2.3) D_k *é um operador bidiferencial (localidade)*

[ou seja: $D_k(f,g)$ é um polinômio nas derivadas de f e g (de ordem zero inclusive)]

$\star$ é dito um produto-estrela hermiteano se satisfizer

(3) $\overline{f(\hbar) \star g(\hbar)} = \overline{g(\hbar)} \star \overline{f(\hbar)}$ *(involutividade com relação à conjugação complexa dos termos da série)*

A associatividade (1) é meramente formal (verificada ordem por ordem nas séries correspondentes), e equivale à condição seguinte:

$$\sum_{j=0}^{k} D_j(f, D_{k-j}(g,h)) = \sum_{j=0}^{k} D_j(D_{k-j}(f,g), h),$$

para todos $k \in \mathbb{N}$, $f, g, h \in \mathcal{O}$.

A involutividade (3) equivale a

$$\overline{D_k(f,g)} = D_k\left(\overline{g}, \overline{f}\right),$$

para todos $k \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathcal{O}$.

No que segue, jamais examinaremos as séries formais em $\mathcal{O}[[\hbar]]$ sob o prisma da Análise. Ou seja, questões concernentes à convergência ou divergência dessas séries não nos preocuparão nestas notas. Lidamos com objetos deliberadamente formais.

2 O que queremos provar?

Toda estrutura de Poisson simplética admite um produto-estrela que a deforme (juntamente com o produto comutativo pontual de funções, nos termos da definição anterior).

A questão da existência de tal deformação (por vezes nos referiremos ao produto-estrela como uma deformação formal das estruturas de álgebra supracitadas) foi levantada já no trabalho seminal de Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerovicz & Sternheimer, *Deformation Theory and Quantization*, publicado nos Annals of Physics em 1978, e satisfatoriamente respondida (positivamente) por de Wilde & Lecomte em *Existence of star-products and of formal deformations in Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifold*, publicado nas Letters of Mathematical Physics em 1983.

Seguiremos a prova construtiva proposta independentemente por Boris V. Fedosov em *A simple geometrical construction of deformation quantization*, publicada pelo Journal of Differential Geometry em 1994.

Esta baseia-se na escolha prévia de uma conexão simplética na variedade M, o que dá um forte caráter geométrico à construção do produto-estrela de Fedosov.

3 Por que produtos-estrela são interessantes?

A descoberta, em fins do século XIX, de que o espectro de emissão de uma cavidade (um modelo de corpo negro) estava em desacordo com a previsão clássica (de Rayleigh-Jeans, baseada na mecânica Newtoniana via estatística de Maxwell-Boltzmann) levaria, em pouco mais de 30 anos, a uma revisão epistemológica profunda e sem precedentes na história das ciências naturais: estamos falando da Mecânica Quântica, cujo arcabouço cinemático difere fundamentalmente daquele da mecânica clássica, assentado por Galileo no século XVII e essencialmente inalterado desde então.

Um quadro comparativo das estruturas cinemática e dinâmica das mecânicas clássica e quântica pode ser apreciado abaixo. Ele nos ajudará a responder à pergunta-título desta seção.

	Mecânica Clássica	**Mecânica Quântica**
Espaço de configuração	variedade diferenciável M	–
Espaço de fase	T^*M	espaço (pré-)Hilbert $\mathcal{H}$
Estados	$x = (q, p) \in T^*M$	$\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\langle\psi\|\psi\rangle}} \|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ $\mathbb{C}$ – subespaços unidimensionais
Álgebra de observáveis $\mathcal{O}$	$\mathcal{O} < C^{\infty}(M)$	$\mathcal{O} \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{operadores} \\ \text{autoadjuntos} \end{array} \right\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$
Produto de $\mathcal{O}$	$(fg)(x) = f(x)\, g(x)$ produto pontual de funções	$(FG) \|\psi\rangle = F(G\|\psi\rangle)$ composição de operadores
Estrutura de Lie de $\mathcal{O}$	$\{\cdot, \cdot\}$ estrutura de Poisson canônica de T^*M	$[F, G] = FG - GF$ comutador de operadores
Equações de evolução para os estados	$\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j}$ Eq. de Hamilton	$\frac{d}{dt} \|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H \|\psi(t)\rangle$ Eq. de Schrödinger
Equação de evolução para os observáveis	$\dot{f} = \{f, H\}$ Eq. de Hamilton	$\frac{d}{dt} A(t) = -\frac{i}{\hbar} [A(t), H]$ Eq. de Heisenberg $A(t) = U_t^{\dagger} A(0)\, U_t,$ $\frac{d}{dt} U_t = -\frac{i}{\hbar} H U_t$
Valor de um observável num determinado estado (resultado de uma medição)	$f(x) \in \mathbb{R},$ para $f \in \mathcal{O}.$	$\lambda \in Spec(F) \subset \mathbb{R},$ para $F \in \mathcal{O}.$

Dado um produto-estrela $\star$ em nosso espaço de fase clássico T^*M e fixada uma função hamiltoniana $H \in C^\infty(T^*M)$, escreva o análogo formal à equação de Heisenberg

$$\dot{f} = -\frac{i}{\hbar}[f, H]_\star = -\frac{i}{\hbar}(f \star H - H \star f).$$

Usando a propriedade (1) de $\star$, temos

$$\dot{f} = \{f, H\} + O(\hbar).$$

Grosso modo, a versão quântica de um sistema mecânico clássico pode ser implementada (processo a que os físicos denominam *quantização*) em termos de uma deformação formal da álgebra dos observáveis clássicos, determinada por um produto-estrela.

O cálculo acima mostra que a dinâmica clássica é recuperada como limite formal dessa versão quântica quando o parâmetro de deformação $\hbar$ tende a zero.

Fisicamente, isso corresponderia à situação macroscópica, i.e., quando as ações (grandezas físicas com dimensão de energia vezes tempo) obtidas a partir dos parâmetros do sistema (ou por outra, as ações "típicas"desse sistema, num certo sentido) são muito grandes em comparação com a ação quântica fundamental dada pela constante de Planck h, a ponto mesmo de podermos desprezar esta última nos cálculos. Nessas circustâncias, espera-se que o comportamento desse sistema seja predominantemente clássico.

Outras teorias físicas têm espaços de fase mais gerais que fibrados cotangentes. Podemos, por exemplo, conceber teorias cujo ambiente natural seja uma variedade simplética (localmente simplectomorfa a $\mathbb{R}^{2n} \simeq T^*\mathbb{R}^n$ via Teorema de Darboux, mas globalmente mais geral). Os produtos-estrela podem significar uma prescrição matematicamente coerente para a quantização desses sistemas clássicos mais gerais, e podem quiçá indicar o caminho para uma teoria unificada e matematicamente satisfatória do conceito de quantização.

Uma última palavra sobre a física dos produtos-estrela, antes de prosseguirmos. Embora bastante satisfatórias do ponto de vista matemático, tais construções não se referem a processos físicos atuais. Com efeito, a física fundamental é aquela dos sistemas quânticos, sendo a mecânica clássica como que a aparência sensorial (nossos sentidos são clássicos; meditando mais detidamente neste ponto, concluiremos talvez que é a estrutura mesma dos nossos sentidos que determina o que chamaríamos o "caráter clássico"do mundo) dos sistemas macroscópicos. Ou por outra: obter o análogo quântico de um sistema clássico - ao que chamamos "quantizar"este último - é essencialmente inatural. Entretanto, esse processo é uma fonte prolífica de exemplos (e.g., o oscilador harmônico simples quântico que serve de base para a teoria quântica de campos escalares livres) tendo interesse teórico próprio.

O processo ingênuo de quantização (quantização canônica) fornecerá o caminho para os primeiros produtos-estrela, ambientados em $\mathbb{R}^{2n}$. Um deles, o produto de Weyl-Moyal, fornecerá a base para a construção de Fedosov.

4 Primeiros produtos-estrela

Denotemos por $x = \left(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n\right)$ as coordenadas dos pontos de $\mathbb{R}^{2n}$, onde consideramos a estrutura de Poisson canônica $\{\cdot, \cdot\}$ dada pelo exemplo 1.

Como espaço de fase quântico usaremos $\mathcal{H} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2\left(\mathbb{R}^n, dq^1 \cdots dq^n\right)$ o conjunto das funções suaves de suporte compacto (nas n variáveis espaciais), que chamaremos funções de onda.

A quantização canônica em Física corresponde à atribuição de um novo significado às funções constituintes da álgebra de observáveis clássicos $\mathcal{O} < C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$: elas são substituídas por operadores diferenciais autoadjuntos atuando no espaço das funções de onda $\mathcal{H}$, a começar pelas funções mais simples de todas: as funções coordenadas espaciais $q^1, \cdots, q^n$ e de momento $p_1, \cdots, p_n$, segundo a seguinte prescrição:

$$q^j \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \mapsto Q^j \in \mathcal{L}(H),$$

onde

$$Q^j \psi(q,p) = q^j \psi(q,p),$$

e

$$p_j \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \mapsto P_j \in \mathcal{L}(H),$$

onde

$$P_j \psi(q,p) = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial q^j}(q,p).$$

Essa prescrição é concebida de modo a que os operadores $Q^1, \cdots, Q^n, P_1, \cdots, P_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ satisfaçam às seguintes *relações de comutação canônicas*

$$\left[Q^j, P_k\right] = i\hbar \delta_k^j id_{\mathcal{H}}$$

e

$$\left[Q^j, Q^k\right] = [P_j, P_k] = 0_{\mathcal{H}},$$

análogas formais das correspondentes clássicas

$$\left\{q^j, p_k\right\} \equiv \delta_k^j,$$

e

$$\left\{q^j, q^k\right\} \equiv \{p_j, p_k\} \equiv 0,$$

onde $j, k \in \mathcal{I}_n = \{1, \cdots, n\}$.

O unidade imaginária i aparece na definição dos operadores de momento para assegurar que estes sejam autoadjuntos, o que se verifica com uma integração por partes.

Tomaremos por álgebra de observáveis clássicos $\mathcal{O}$ a $\mathbb{C}-$subálgebra de $C^\infty(M)$ gerada pelas funções coordenadas (é assim que os físicos procedem, tacitamente, embora), a saber

$$\mathcal{O} = \left\langle q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n \right\rangle_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}\left[q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n\right].$$

O programa para a construção de um produto-estrela em $\mathbb{R}^{2n}$ é o seguinte: obtemos uma representação

$$\rho : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

da $\mathbb{C}-$álgebra $\mathcal{O}$ em termos de operadores diferenciais sobre as funções de onda, e então usamos a álgebra de operadores em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ para induzir uma nova estrutura de $\mathbb{C}-$álgebra em $\mathcal{O}$ (ou por outra, fazemos o pull-back da composição de operadores via ρ). Nosso produto-estrela será definido então por

$$f \star g = \rho^{-1}\left(\rho(f) \circ \rho(g)\right).$$

Um problema que se apresenta de pronto é a questão da ordenação dos operadores: que valor atribuir à imagem do monômio $\left(q^1\right)^2 p_1$ pela representação ρ, por exemplo? Há três candidatos distintos bem naturais: $Q^1Q^1P_1$, $Q^1P_1Q^1$ e $P_1Q^1Q^1$.

Ora, a escolha da representação corresponde então à escolha da ordenação, e há tantas representações possíveis quanto ordenações. Isso já sugere que o produto-estrela obtido para uma variedade simplética está longe de ser único. Embora não nos preocupemos com essa questão nestas notas, é possível definir uma noção de equivalência para produtos-estrela. Ainda assim, é possível mostrar que em geral pode haver dois produtos-estrelas não-equivalentes numa mesma variedade de Poisson. De fato, as classes de equivalência de produtos-estrela sobre M são parametrizadas por $H^2(M)$ (cohomologia de de Rham de grau 2 de M). Resta a questão de determinar qual dentre os possíveis produtos-estrela é fisicamente mais razoável. Essa questão é decidida em geral pela consideração das simetrias clássicas do problema, caso a caso. No presente caso, em que nossa variedade de Poisson é $\mathbb{R}^{2n}$, há apenas uma classe de equivalência.

4.1 Ordenação padrão

A ordenação padrão consiste em escrever sempre os operadores de momento à direita dos operadores de posição. É claramente a ordenação mais simples dentre as possíveis.

Assim,

$$\begin{aligned}\rho_{st}\left(q^{j_1}, \cdots, q^{j_r}, p_{k_1}, \cdots, p_{k_s}\right) &= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^s Q^{j_1} \circ \cdots \circ Q^{j_r} \circ P_{k_1} \circ \cdots \circ P_{k_s} \\ &= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^s q^{j_1} \cdots q^{j_r} \frac{\partial^s}{\partial q^{k_1} \cdots \partial q^{k_s}}.\end{aligned}$$

Estendendo $\mathbb{C}-$linearmente esta definição, obtemos o monomorfimo de $\mathbb{C}-$álgebras

$$\rho_{st} : \mathcal{O} \simeq C\left[q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n\right] \hookrightarrow DiffOp(\mathcal{H}) < \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

dado por

$$\rho_{st}(f) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^r \left.\frac{\partial^s f}{\partial p_{\mu_1} \cdots \partial p_{\mu_r}}\right|_{p=0} \frac{\partial^r}{\partial q^{\mu_1} \cdots \partial q^{\mu_r}}.$$

Note que a soma acima é, na verdade, finita.

A forma explícita da representação ρ_{st} (obtida acima a partir da série de Taylor de f com relação às coordendas de momento) sugere que estendamos $\mathcal{O}$ a $Pol^{\bullet}(T^*\mathbb{R}^n) \simeq C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}[p_1, \cdots, p_n]$, i.e., à álgebra das funçoes suaves de $\mathbb{R}^{2n}$ com dependência polinomial nas coordenadas de momento. Definindo por $DiffOp(\mathcal{H})$ exatamente a imagem por ρ_{st} de $Pol^{\bullet}(T^*\mathbb{R}^n)$, ou seja os operadores diferenciais com coeficientes suaves que atuam sobre funções de onda, temos uma bijeção

$$\rho_{st} : Pol^{\bullet}(T^*\mathbb{R}^n) \to DiffOp(C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)).$$

Observação 5 *note que* $Pol^{\bullet}(T^*\mathbb{R}^n) \simeq \vee^{\bullet} T^*\mathbb{R}^n \simeq C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}[p_1, \cdots, p_n]$ *como* $\mathbb{C}$*-álgebras* $\mathbb{Z}$*-graduadas.*

Por $\vee$*, denotamos o produto simétrico de 1-formas, dado por*

$$\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_k = \sum_{\sigma \in S_k} \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(k)}.$$

O produto-estrela padrão $\star_{st}$ definido por

$$f \star_{st} g = \rho_{st}^{-1}(\rho_{st}(f) \circ \rho_{st}(g))$$

e dado explicitamente por (a conta é fácil)

$$f \star_{st} g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^k \frac{\partial^k f}{\partial p_{\mu_1} \cdots \partial p_{\mu_k}} \frac{\partial^k g}{\partial q^{\mu_1} \cdots \partial q^{\mu_k}}$$

não é hermiteano. Com efeito, calcula-se o operador adjunto a $\rho_{st}(f)$ no espaço $\mathcal{H} = C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ por integrações parciais sucessivas, obtenso-se, para $\psi, \phi \in \mathcal{H}$,

$$\langle \psi, \rho_{st}(f) \phi \rangle = \left\langle \rho_{st}\left(N^2 \overline{f}\right) \psi, \phi \right\rangle,$$

onde

$$N = e^{\frac{\hbar}{2i}\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^k \underbrace{\Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{k \text{ fatores}}$$

com

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial q^{\mu} \partial p_{\mu}}.$$

Ou seja,

$$\rho_{st}(f)^{\dagger} = \rho_{st}\left(N^2 \overline{f}\right). \tag{2}$$

Do ponto de vista físico, não ser hermiteano é um defeito para um produto-estrela, uma vez que desejamos que valha

$$\rho_{st}(f)^{\dagger} = \rho_{st}(f)$$

para toda função f a valores reais, já que os operadores quânticos devem ser autoadjuntos (vide seção anterior). A forma obtida para $\rho_{st}(f)^{\dagger}$ sugere o caminho para o conserto: podemos usar N para obter um produto-estrela hermiteano.

Note que

$$N : Pol^{\bullet}(T^*\mathbb{R}^n) \longrightarrow Pol^{\bullet}(T^*\mathbb{R}^n)$$

é um $\mathbb{C}-$isomorfismo linear.

4.2 Ordenação de Weyl

Defina $\rho_W = \rho_{st} \circ N$.

Temos então

$$\begin{aligned}
\rho_W(f)^\dagger &= \rho_{st}(Nf)^\dagger \quad \text{(por definição)} \\
&= \rho_{st}\left(N^2\overline{Nf}\right) \quad \text{(por (2))} \\
&= \rho_{st}\left(N^2N^{-1}\overline{f}\right) \\
&= \rho_{st}\left(N\overline{f}\right) \\
&= \rho_W(f) \quad \text{(por definição),}
\end{aligned}$$

como queríamos.

Induzindo um produto $\star_W$ em $Pol^\bullet(T^*\mathbb{R}^n)$ por meio da representação de Weyl ρ_W, temos

$$\begin{aligned}
f \star_W g &= \rho_W^{-1}(\rho_W(f) \circ \rho_W(g)) \\
&= N^{-1}\rho_{st}^{-1}(\rho_{st}(Nf) \circ \rho_{st}(Ng)) \quad \text{(por definição de } \rho_W) \\
&= N^{-1}(Nf \star_{st} Ng) \quad \text{(por definição de } \star_{st}\text{),}
\end{aligned}$$

donde

$$N(f \star_W g) = Nf \star_{st} Ng, \tag{3}$$

i.e., N é um isomorfismo entre as $\mathbb{C}-$álgebras $(Pol^\bullet(T^*\mathbb{R}^n), \star_{st})$ e $(Pol^\bullet(T^*\mathbb{R}^n), \star_W)$.

Podemos usar (3) para calcular a expressão explícita de $\star_W$. Os cálculos envolvidos são diretos, mas muito longos. A título de ilustração, exibimos abaixo a expressão no caso $n = 1$, com $x = (q,p) \in \mathbb{R}^2$.

$$f \star_W g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\hbar}{2i}\right)^k \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\frac{\partial^k f}{\partial q^j \partial p^{k-j}}\frac{\partial^k g}{\partial q^{k-j}\cdots\partial p^j}.$$

Pode-se mostrar que a ordenação determinada pela representação de Weyl é a simetrização total de monômios, i.e.,

$$\rho_W\left(q^{j_1},\cdots,q^{j_r},p_{k_1},\cdots,p_{k_s}\right) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^s \frac{1}{r!s!}\sum_{\substack{\sigma\in S_r \\ \tau\in S_s}} Q^{\sigma(1)}\circ\cdots\circ Q^{\sigma(r)}\circ P_{\tau(1)}\circ\cdots\circ P_{\tau(s)}.$$

Por exemplo, $\rho_W\left(q^2p\right) = \frac{1}{3}\left(Q^2P + QPQ + PQ^2\right) = -i\hbar q^2\frac{\partial}{\partial q} - i\hbar q$.

4.3 O produto-estrela de Weyl-Moyal

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita, munido de uma estrutura de Poisson dada, segundo uma base $(e_1,\cdots,e_n)$ por

$$P = P^{\mu\nu}e_\mu \otimes e_\nu,$$

com
$$P^{\mu\nu} = -P^{\nu\mu} \in \mathbb{R} \ \text{ fixos.}$$

Seja $\mathcal{O} = \mathbb{C}\left[x^1, \cdots, x^n\right] < C^\infty(V;\mathbb{R})$ [aqui vemos V como variedade diferenciável com atlas composto de uma única carta $(V, x^1, \cdots, x^n)$].

Defina, para $f, g \in \mathcal{O}$,

$$\begin{aligned}(f \star_M g)(z) &= \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}P^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right)(f(x)\,g(y))\Big|_{x=y=z} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^k P^{\mu_1\nu_1}\cdots P^{\mu_k\nu_k}\frac{\partial^k f(z)}{\partial x^{\mu_1}\cdots\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial^k g(z)}{\partial x^{\nu_1}\cdots\partial x^{\nu_k}}.\end{aligned}$$

Verifica-se por inspeção que $\star_M$ é um produto-estrela hermiteano sobre $(V, \{\cdot,\cdot\})$.

5 A construção de Fedosov

Doravante $\left(M^{2n}, \omega\right)$ denotará uma variedade simplética.

Dado $x \in M$, $(T_xM, \omega(x))$ é um espaço vetorial simplético. Como tal, ele admite um produto-estrela de Weyl-Moyal, como o que descrevemos na seção anterior, com $P^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu}(x)$, para funções polinomiais nas suas coordenadas segundo uma dada base para T_xM.

Seja $\varphi = \left(x^1, \cdots, x^{2n}\right) : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ um sistema de coordenadas em torno de x (i.e., $x \in U$) [podemos, por comodidade, supô-lo uma carta de Darboux, de tal maneira que seja $\omega^{\mu\nu}(y) = \omega^{\mu\nu} \equiv cte.$, $\forall y \in U$]. Podemos ver as referidas funções polinomiais como somas finitas de monômios de graus $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$$a_{\mu_1\cdots\mu_k}(x)\,dx^{\mu_1} \vee \cdots \vee dx^{\mu_k} \in \vee^k T_x^*M,$$
onde, como já frisamos acima, $\vee$ responde pelo produto simétrico de 1-formas.

Podemos estender o produto de Weyl-Moyal em T_xM fibra-a-fibra a todo TU, obtendo um quase-produto-estrela local sobre U, dado pela fórmula de Moyal
$$a \star b =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{-i\hbar}{2}\right)^k \omega^{\mu_1\nu_1}\cdots\omega^{\mu_k\nu_k}\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\right)\cdots i\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_k}}\right)a\right]\vee\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}\right)\cdots i\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu_k}}\right)b\right],$$

onde $a \in \Gamma(\vee^r T^*U)$, e $b \in \Gamma(\vee^s T^*U)$, estendida linearmente a todas as ordens r e s. [aqui, $i(X)\,\alpha$ representa a contração do campo de vetores X com o tensor covariante α].

Note que esta fórmula local é covariante (i.e., não depende do sistema de coordenadas de Darboux adotado sobre U).

5.1 O fibrado (formal) das álgebras de Weyl

Definição 6 *A álgebra de Weyl W_x associada ao espaço simplético T_xM é definido pelo espaço das séries formais*

$$\begin{aligned} W_x &= \left(\oplus_{p=0}^{\infty} \vee^p T_x^* M\right)[[\hbar]] \\ &= \left(\vee^\bullet T_x^* M\right)[[\hbar]] \end{aligned}$$

munida do produto

$$a \circ b = \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\omega^{\mu\nu}(x)\, i\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_x\right) \otimes i\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right|_x\right)\right) a \otimes b, \tag{4}$$

onde $a \in \Gamma(\vee^r T^* U)$, e $b \in \Gamma(\vee^s T^* U)$, estendida linearmente a todas as ordens r e s (nos coeficientes da série) e termo-a-termo a todas as ordens do parâmetro $\hbar$.

É claro que a definição acima está longe de ser clara, e requer alguns esclarecimentos. Vamos a eles.

Um elemento típico de W_x é

$$a = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{p_k} a_k^{(l)}\right)\hbar^k,$$

onde

$$a_k^{(l)} = a_{k,\mu_1\cdots\mu_l}\, dx^{\mu_1}|_x \vee \cdots \vee dx^{\mu_l}|_x \in \vee^l T_x^* M.$$

Às vezes será útil escrever

$$a_k^{(l)} = a_{k,\mu_1\cdots\mu_l}\, y^{\mu_1}\cdots y^{\mu_l} \in \mathbb{C}\left[y^1, \cdots, y^{2n}\right],$$

onde

$$y = y^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_x \in T_x M,$$

i.e., contraímos $a_k^{(l)}$ com k cópias de um vetor típico $y \in T_xM$, para que suas componentes apareçam com argumentos de uma função polinomial, que pode portanto ser multiplicada, derivada, etc. Isso tornará a notação menos fastidiosa em algumas passagens, ou facilita as contas em outras. É a notação original de Fedosov.

Com esta notação, o produto de Weyl pode ser escrito como

$$a \circ b = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^k \omega^{\mu_1\nu_1}\cdots\omega^{\mu_k\nu_k}\frac{\partial^k a}{\partial y^{\mu_1}\cdots\partial y^{\mu_k}}\frac{\partial^k b}{\partial y^{\nu_1}\cdots\partial y^{\nu_k}}, \tag{5}$$

onde $a, b \in \mathbb{C}\left[y^1, \cdots, y^{2n}\right]$.

Cumpre observar que a definição (4) [ou mesmo sua versão notacionalmente mais conveniente (5)] é covariante, no sentido de que não depende da particular escolha de coordenadas de Darboux tomadas para escrevê-las. É graças e esse fato trivial que poderemos estender essa definição de produto fibra-a-fibra (i.e., para todas as álgebras W_x, para todos $x \in M$) de maneira consistente.

A associatividade da álgebra de Weyl se verifica por meio de cálculos um pouco longos, mas diretos.

Definição 7 *Definimos o fibrado (formal) das álgebras de Weyl sobre M pela união disjunta*

$$W = \cup_{x \in M} \{x\} \times W_x$$

com projeção

$$\pi : \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & M \\ (x,a) & \mapsto & x \end{array}.$$

Denotaremos a $C^\infty(M)-$álgebra de seções do fibrado de Weyl W por $\mathcal{W} = \Gamma(W)$.

Uma vez mais, alguns esclarecimentos se fazem necessários, principalmente no que concerne às seções, que são os objetos mais importantes na construção de Fedosov.

Um elemento típico de $\mathcal{W} = \Gamma(W) \simeq \Gamma(\vee^\bullet T^* M)[[\hbar]]$ é dado por

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{p_k} a_k^{(l)} \right) \hbar^k : x \in M \mapsto a(x) \in W_x,$$

onde $a_k^{(l)} \in \Gamma\left(\vee^l T^* M\right)$ é um $l-$tensor covariante totalmente simétrico, dado localmente por

$$a_k^{(l)} = a_{k,\mu_1 \cdots \mu_l} dx^{\mu_1} \vee \cdots \vee dx^{\mu_l}.$$

$\mathcal{W}$ é uma $C^\infty(M)-$álgebra associativa com unidade (função identicamente igual a 1) segundo o produto dado pela extensão fibra-a-fibra do produto de Weyl (4). Nos referiremos a ela doravante como *a álgebra de Weyl* sobre M.

O centro $\mathcal{Z} < \mathcal{W}$ da álgebra de Weyl corresponde exatamente a

$$\mathcal{Z} = \Gamma\left(\vee^0 T^* M\right)[[\hbar]] = C^\infty(M)[[\hbar]],$$

como nos mostra um pouco de reflexão sobre a fórmula (5). Um elemento central típico é dado por

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \hbar^k,$$

onde $a_k = a_k(x) \in C^\infty(M)$ [ou seja: os coeficiente da série formal que representa um elemento central não dependem do argumento y].

Atribuindo grau $2k$ ao termo em $\hbar^k$ da série formal e grau l aos termos cujos coeficientes $a^{(l)}$ são $l-$tensores, obtemos uma filtração da álgebra de Weyl com relação ao grau total $2k+l$:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathcal{W} & \supset & \mathcal{W}_1 & \supset & \cdots & \supset & \mathcal{W}_g & \supset & \cdots \\ & & \text{seções com termo} & & & & \text{seções com termo} & & \\ & & \text{de grau mais baixo} & & & & \text{de grau mais baixo} & & \\ & & 2k+l \geq 1 & & & & 2k+l \geq g & & \end{array}$$

Observação 8 *A introdução do grau total* $\deg a = (2k + l)\, a$ *deve-se ao fato de que este sim é uma derivação com relação ao produto (4), ao passo que o grau da parte simétrica,* $\deg a = la$*, é uma derivação com relação ao produto simétrico. A filtração obtida acima será usada de maneira importante na construção do produto-estrela de Fedosov.*

No que segue, precisaremos também de formas diferenciais definidas em M tomando valores na álgebra de Weyl. Denotaremos o espaço de tais objetos por $\Omega^{\bullet}(M, W)$.

Temos

$$\begin{aligned}\Omega^{\bullet}(M; W) &= \mathcal{W} \otimes \Omega^{\bullet}(M) \\ &= \mathcal{W} \otimes \left[\oplus_{q=0}^{2n} \Omega^{q}(M)\right],\end{aligned}$$

cujo elemento típico pode ser escrito como

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{p_k} \sum_{q=0}^{q_k} a_k^{(p)[q]} \right) \hbar^k,$$

onde $a_k^{(p)[q]} \in \Gamma\left(\vee^p T^* M \otimes \wedge^q T^* M\right)$ é um $(p+q)$ −tensor contravariante simétrico nos primeiros p argumentos e antissimétrico nos q últimos argumentos, que pode ser escrito localmente como

$$a_k^{(p)[q]} = a_{k,\left(\mu_1 \cdots \mu_p\right)[\nu_1 \cdots \nu_q]} dx^{\mu_1} \vee \cdots \vee dx^{\mu_p} \otimes dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}$$

ou, na notação de Fedosov,

$$a_k^{(p)[q]} = a_{k,\left(\mu_1 \cdots \mu_p\right)[\nu_1 \cdots \nu_q]} y^{\mu_1} \vee \cdots \vee y^{\mu_p} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q},$$

onde

$$y = y^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \in \mathfrak{X}(U),$$

é um campo local genérico de vetores que serve como argumento de $a_k^{(p)[q]}$.

$\Omega^{\bullet}(M, W)$ estende a $C^{\infty}(M)$ −álgebra $\mathcal{W} = \Omega^0(M, W)$, com produto estendido pela regra

$$\underbrace{\underbrace{(a \otimes \alpha)}_{A} \circ \underbrace{(b \otimes \beta)}_{B}}_{A \circ B} = (a \circ b) \otimes \alpha \wedge \beta.$$

Com este produto estendido, $\Omega^{\bullet}(M, W)$ torna-se uma *superálgebra* $\mathbb{Z}^2$−graduada.

A superálgebra $\Omega^{\bullet}(M, W)$ herda de $\mathcal{W}$ uma filtração com respeito ao *grau total da parte simétrica* $2k + p$:

$$\Omega^{\bullet}(M, W) = \mathcal{W} \otimes \Omega^{\bullet}(M) \supset \mathcal{W}_1 \otimes \Omega^{\bullet}(M) \supset \mathcal{W}_2 \otimes \Omega^{\bullet}(M) \supset \cdots \tag{6}$$

Define-se um colchete (*supercomutador*) $[\cdot,\cdot]$ para a superálgebra $\Omega^{\bullet}(M,W)$ pela extensão linear e termo-a-termo da regra

$$[A,B]=A\circ B-(-1)^{q_1q_2}\,B\circ A,$$

onde $A\in\mathcal{W}\otimes\Omega^{q_1}(M)$ e $B\in\mathcal{W}\otimes\Omega^{q_2}(M)$. Esta definição visa à validade da fórmula

$$[a\otimes\alpha,b\otimes\beta]=[a,b]\otimes\alpha\wedge\beta.$$

É claro que o centro $\Omega^{\bullet}(M,W)$ é dado por

$$\mathcal{Z}\otimes\Omega^{\bullet}(M)\simeq C^{\infty}(M)[[\hbar]]\otimes\Omega^{\bullet}(M).$$

No que segue, será essencial que se definam certas projeções aos centros das $C^{\infty}(M)-$álgebras envolvidas. Elas são dadas operacionalmente pela regra abaixo.

$$\begin{array}{rcc}
A= & A(x,y,dx,\hbar) & \in\Omega^{\bullet}(M,W)\\
 & \downarrow & \begin{array}{c}\text{contraia a parte simétrica}\\ \text{com o campo } y=0\in\mathfrak{X}(M)\end{array}\\
A_0= & A(x,0,dx,\hbar) & \in\mathcal{Z}\otimes\Omega^{\bullet}(M)\\
 & \downarrow & \begin{array}{c}\text{contraia a parte antissimétrica}\\ \text{com o campo } y=0\in\mathfrak{X}(M)\end{array}\\
A_{00}= & A(x,0,0,\hbar) & \in\mathcal{Z}
\end{array}$$

A projeção mais importante é a *aplicação símbolo*

$$\begin{array}{cccc}\sigma: & \mathcal{W} & \twoheadrightarrow & \mathcal{Z}\simeq C^{\infty}(M)[[\hbar]]\\ & a=a(x,y,\hbar) & \mapsto & \sigma(a)=a_0=a(x,0,\hbar)\end{array}. \tag{7}$$

Denominamos a série $\sigma(a)=a_0$ o *símbolo* da seção $a\in\mathcal{W}$.

A idéia agora é encontrar uma $C^{\infty}(M)-$subálgebra $\mathcal{O}$ de $\mathcal{W}$ em bijeção com $\mathcal{Z}$ (a bijeção será dada pela restrição de σ a $\mathcal{O}$, cuja inversa denotaremos por σ^{-1}), e então usar o produto de Weyl $\circ$ para induzir em $\mathcal{Z}\simeq C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ um produto-estrela $\star$ dado por

$$a(\hbar)\star b(\hbar)=\sigma\left(\sigma^{-1}(a(\hbar))\circ\sigma^{-1}(b(\hbar))\right),$$

para todas as séries formais

$$a(\hbar)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\hbar^k,\quad b(\hbar)=\sum_{j=0}^{\infty}b_j\hbar^j\in C^{\infty}(M)[[\hbar]].$$

Para isso, lançaremos mão de uma conexão simplética ∇ livre de torção em M, estenderemo-la convenientemente a uma conexão ∂ no fibrado de Weyl W, e procuraremos modificá-la a uma conexão abeliana (i.e., de curvatura nula) D.

A $C^{\infty}(M)-$subálgebra $\mathcal{O} < \mathcal{W}$ procurada será a das seções planas com relação a D, i.e.,

$$\mathcal{O} = \mathcal{W}_D \equiv \{a \in \mathcal{W}\ ; Da = 0\}.$$

5.2 Alguma análise no fibrado de Weyl

Será útil diferenciarmos a partir daqui dois tipos de contração: entre um campo de vetores X e a parte simétrica de uma (super)seção de Weyl A, que denotaremos por $i_{\vee}(X)A$; e entre um campo de vetores X e a parte antissimétrica de uma superseção de Weyl A, que denotaremos por $i_{\wedge}(X)A$

Consideremos dois importantes operadores,

$$\delta : \mathcal{W}_p \otimes \Omega^q(M) \longrightarrow \mathcal{W}_{p-1} \otimes \Omega^{q+1}(M)$$

e

$$\delta^* : \mathcal{W}_p \otimes \Omega^q(M) \longrightarrow \mathcal{W}_{p+1} \otimes \Omega^{q-1}(M)$$

dados formalmente por

$$\delta A = dx^{\mu} \wedge i_{\vee}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) A$$

e ,

$$\delta^* A = dx^{\mu} \vee i_{\wedge}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) A,$$

ou, na notação de Fedosov,

$$\delta A = dx^{\mu} \wedge \frac{\partial A}{\partial y^{\mu}}$$

e

$$\delta^* A = y^{\mu} i_{\wedge}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) A.$$

Observação 9 *O operador δ é uma extensão da derivada exterior de formas diferenciais d, e degrada uma superseção de uma unidade.(segundo a filtração pelo grau total da parte simétrica (6), estabelecida na seção anterior). Sua contrapartida δ^* gradua em uma unidade a superseção sobre a qual atua.*

É bem ilustrativa a ação desses operadores em monômios da forma

$$dx^{(\mu_1 \cdots \mu_p)[\nu_1 \cdots \nu_q]} \equiv dx^{\mu_1} \vee \cdots \vee dx^{\mu_p} \otimes dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}. \tag{8}$$

A saber,

$$\delta dx^{(\mu_1 \cdots \mu_p)[\nu_1 \cdots \nu_q]} = \sum_{j=1}^{p} dx^{(\mu_1 \cdots \widehat{\mu_j} \cdots \mu_p)[\mu_j \nu_1 \cdots \nu_q]}, \tag{9}$$

e

$$\delta^* dx^{(\mu_1\cdots\mu_p)[\nu_1\cdots\nu_q]} = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k+1}\, dx^{(\mu_1\cdots\mu_p\nu_k)[\nu_1\cdots\widehat{\nu_k}\cdots\nu_q]}. \tag{10}$$

Verifica-se por inspeção que, sendo definidos por fórmulas locais covariantes, os operadores δ e δ^* estão bem-definidos globalmente.

Lema 10 *Os operadores δ e δ^*.possuem as propriedades*

(1) $\delta^2 = (\delta^*)^2 = 0$

(2) $(\delta\delta^* + \delta^*\delta)\, dx^{(\mu_1\cdots\mu_p)[\nu_1\cdots\nu_q]} = (p+q)\, dx^{(\mu_1\cdots\mu_p)[\nu_1\cdots\nu_q]}$

(3) δ *é uma antiderivação da superálgebra de Weyl, i.e.,*

$$\delta\,(A\circ B) = \delta A\circ B + (-1)^q\, A\circ \delta B,$$

onde $A\in\Omega^q\,(M,W)$*.*

(4) δ *admite a representação*

$$\delta A = -\left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)\omega_{\mu\nu}dx^{\mu}\otimes dx^{\nu}, A\right]. \tag{11}$$

A prova dessas propriedades envolve apenas cálculos diretos, que omitiremos por brevidade.

Sobre monômios da forma (8), defina o operador δ^{-1}, dado por

$$\delta^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{p+q}\delta^* & \text{, se } p+q>0 \\ 0 & \text{, se } p+q=0 \end{cases},$$

e estenda-o linearmente e termo-a-termo.

Pela propriedade 2 do Lema acima, temos que toda superseção $A\in\Omega^\bullet\,(M,W)$ admite uma decomposição da forma

$$A = \delta\delta^{-1}A + \delta^{-1}\delta A + A_{00}, \tag{12}$$

que, por analogia, denominaremos doravante *decomposição de Hodge-de Rham.*

5.3 Alguma geometria no fibrado de Weyl

Seja $\nabla : \mathfrak{X}\,(M) \longrightarrow \Omega^1\,(M,TM) \simeq \mathfrak{X}\,(M)\otimes\Omega^1\,(M)$ uma conexão simplética livre de torção em M (uma tal conexão sempre existe, embora não seja única como a conexão de Levi-Civita no caso riemmaniano).

Usando a derivação covariante de campos tensoriais (i.e., estendendo ∇ aos demais fibrados associados a TM pela regra de Leibniz), define-se uma conexão $\partial : \Omega^\bullet\,(M,W) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}\,(M,W)$ no (super)fibrado de Weyl $W\otimes\wedge^\bullet T^*M$ pela extensão linear e termo-a-termo da regra

$$\partial A = dx^\mu \wedge \nabla_\mu A, \tag{13}$$

onde $A \in \Omega^q(M,W)$, e $\nabla_\mu A$ refere-se à derivação covariante da parte simétrica da seção A com relação ao campo local de vetores $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Apesar da definição de ∇ ser dada por uma expressão local, esta expressão é covariante, donde inferimos sua validade global.

Lema 11 *A conexão ∂ possui as seguintes propriedades.*

(1) $\partial(A \circ B) = \partial A \circ B + (-1)^{q_1} A \circ \partial B, \quad \forall A \in \Omega^{q_1}(M,W)$

(2) $\partial(\alpha \wedge A) = d\alpha \wedge A + (-1)^q \alpha \wedge \partial A, \quad \forall \alpha \in \Omega^q(M)$

(3) em coordenadas locais de Darboux, podemos escrever

$$\partial A = dA + \left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)\Gamma, A\right], \tag{14}$$

onde

$$dA = dx^\mu \wedge \frac{\partial A}{\partial x^\mu}$$

e

$$\Gamma = \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu\rho} dx^\mu \vee dx^\nu \otimes dx^\rho \in \Omega^1(U,W),$$

onde os coeficientes $\Gamma_{\mu\nu\rho} = \omega_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}$ são símbolos de Christoffel da conexão ∇ sobre $U \subset M$.

A propriedade (1) significa que ∂ é uma antiderivação da superálgebra de Weyl $(\Omega^\bullet(M,W), \circ)$.

A propriedade (2) significa que ∂ é uma extensão da derivada exterior de formas diferenciais.

A propriedade (3) fornece uma representação local especialmente propícia às correções que nos darão a conexão abeliana desejada.

Prova. Cálculos diretos, mas muito longos. Omitiremos-los por brevidade. ■

Lema 12 *Valem as identidades*

(1) $\partial\delta + \delta\partial = 0$

(2) $\partial^2 A = \left[\left(\frac{i}{\hbar}\right) R, A\right]$, *onde*

$$R = \frac{1}{4} R_{\kappa\lambda\mu\nu} dx^\kappa \vee dx^\lambda \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

e $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \omega_{\kappa\rho} R^\rho_{\lambda\mu\nu}$ são componentes do tensor de curvatura da conexão simplética ∇.

Prova. Conseqüências diretas das fórmulas locais (11) e (14). ■

A seguir, trabalharemos com conexões D obtidas a partir de ∂ por meio de uma "correção"$\gamma \in \Omega^1(M, W)$.

$$DA = \partial A + \left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)\gamma, A\right]. \tag{15}$$

A fórmula acima claramente nos dá uma conexão no (super)fibrado de Weyl $W \otimes \wedge^\bullet T^*M$ (veja que γ é uma 1-forma globalmente definida e que $ad_\circ\left(\left(\frac{i}{\hbar}\right)\gamma\right) \equiv \left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)\gamma, \cdot\right]$ é uma superderivação).

Essa correção é determinada pela superseção γ apenas a menos de uma superseção central

$$\bar{\gamma} \in \mathcal{Z} \otimes \Omega^1(M) \simeq C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \Omega^1(M),$$

uma vez que a correção γ aparece no interior de um supercomutador. Dessa forma, temos liberdade para introduzir alguma "condição de calibre"sobre γ. É uma boa escolha dessa condição que permitirá que obtenhamos uma conexão abeliana D univocamente determinada a partir de ∇.

Em coordenadas de Darboux, lançando mão da representação local (14) de ∂, podemos reescrever a fórmula acima como

$$DA = dA + \left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)(\Gamma + \gamma), A\right]. \tag{16}$$

Um cálculo direto a partir de (15) mostra que a curvatura D^2 de uma conexão corrigida D é dada pela fórmula

$$D^2 A = \left[\frac{i}{\hbar}\left(R + \partial\gamma + \frac{i}{\hbar}\gamma^2\right), A\right] \tag{17}$$

Definição 13 *Seja D uma conexão da forma (15), satisfazendo à seguinte* condição de calibre de Weyl

$$\gamma_0 = 0$$

(lembrando: γ_0 é a primeira projeção da superseção γ).

A superseção $\Omega \in \Omega^2(M, W)$.dada pela fórmula

$$\frac{i}{\hbar}\Omega = \frac{i}{\hbar}\left(R + \partial\gamma + \frac{i}{\hbar}\gamma^2\right) \tag{18}$$

é chamada curvatura de Weyl *da conexão D.*

Com a definição acima, podemos reescrever (17) como

$$D^2 A = \left[\frac{i}{\hbar}\Omega, A\right], \tag{19}$$

donde fica claro que a curvatura de Weyl de uma conexão abeliana é uma superseção central

$$\Omega \in \mathcal{Z} \otimes \Omega^2(M) \simeq C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \Omega^2(M).$$

5.4 O produto-estrela de Fedosov

O pequeno arsenal técnico desenvolvido na seção anterior é a hipótese tácita dos dois seguintes teoremas, os principais da construção de Fedosov. O primeiro deles fornece um método construtivo para a obtenção da tão desejada conexão abeliana D no fibrado de Weyl a partir de uma conexão simplética ∇ que admitimos previamente fixada em M, e devidamente estendida pela prescrição (13) a uma conexão ∂ no fibrado de Weyl.

Teorema 14 *Existe uma única superseção $r \in \mathcal{W}_3 \otimes \Omega^1(M)$ satisfazendo a condição de calibre*

$$\delta^{-1} r = 0,$$

tal que a prescrição

$$D = -\delta + \partial + \left[\frac{i}{\hbar} r, \cdot\right] \tag{20}$$

define uma conexão abeliana $D : \Omega^\bullet(M, W) \to \Omega^{\bullet+1}(M, W)$.

Prova. Primeiramente, note que a condição de calibre $\delta^{-1} r = 0$ implica a condição de calibre de Weyl $r_0 = 0$, pela observação 9.

Dada uma superseção arbitrária $r \in \Omega^\bullet(M, W)$, vê-se sem dificuldades que $D : \Omega^\bullet(M, W) \to \Omega^{\bullet+1}(M, W)$ dada por (20) é uma conexão, pois r é uma superseção globalmente definida e, como superderivações, δ, ∂ e $ad_\circ\left(\frac{i}{\hbar} r\right) \equiv \left[\frac{i}{\hbar} r, \cdot\right]$ satisfazem a regra de Leibniz.

Use a representação (11) para reescrever a prescrição (20) como

$$D = \partial + \left[\frac{i}{\hbar}\left(\omega_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + r\right), \cdot\right].$$

Usando o Lema 11, calcula-se facilmente a curvatura de Weyl Ω de D, obtendo-se

$$\Omega = -\omega + R - \delta r + \partial r + \frac{i}{\hbar} r^2.$$

Considerada como elemento da superálgebra de Weyl $\Omega^\bullet(M, W)$, a forma simplética ω é central (por ser totalmente antissimétrica). Logo, a condição

$$\delta r = R + \partial r + \frac{i}{\hbar} r^2 \tag{21}$$

sobre r é suficiente para que a conexão D seja abeliana.

Suponha que $r \in \mathcal{W}_3 \otimes \Omega^1(M)$ ($\Rightarrow r_{00} = 0$) seja solução da equação diferencial (21) e satisfaça $\delta^{-1} r = 0$. Essa condição de calibre simplifica a decomposição de Hodge-de Rham (12) de r a

$$r = \delta^{-1} \delta r \tag{22}$$

(agora fica claro o porquê da notação δ^{-1}). Aplicando o operador δ^{-1} a (21), vem

$$r = \delta^{-1} R + \delta^{-1}\left(\partial r + \frac{i}{\hbar} r^2\right). \tag{23}$$

Agora faremos uso fundamental da observação 9. Veja que ∂ preserva a filtração (6), ao passo que δ^{-1}, assim como δ^{*}, gradua de uma unidade a superseção em que atua. Dessa forma, iterando a equação (23), obtemos cada termo de r a partir do termo de grau imediatamente inferior, a começar do termo de grau 3, que denotaremos por r_3 e calcularemos de uma vez, a título de ilustração.

Como assumimos $r \in \mathcal{W}_3 \otimes \Omega^1(M)$, temos que r_3 é dado simplesmente por $r_3 = \delta^{-1} R$. Usando a definição do operador δ^{-1}, e lembrando a ação de δ^{*} em monômios, dada por (10), vem

$$\begin{aligned}
r_3 &= \frac{1}{2+2}\delta^{*}\left(\frac{1}{4}R_{\kappa\lambda\mu\nu}dx^{\kappa}\vee dx^{\lambda}\otimes dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\right)\\
&= \frac{1}{16}R_{\kappa\lambda\mu\nu}\delta^{*}\left(dx^{\kappa}\vee dx^{\lambda}\otimes dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\right)\\
&= \frac{1}{16}R_{\kappa\lambda\mu\nu}\left(dx^{\kappa}\vee dx^{\lambda}\vee dx^{\mu}\otimes dx^{\nu}-dx^{\kappa}\vee dx^{\lambda}\vee dx^{\nu}\otimes dx^{\mu}\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(R_{\kappa\lambda\mu\nu}-R_{\kappa\lambda\nu\mu}\right)dx^{\kappa}\vee dx^{\lambda}\vee dx^{\mu}\otimes dx^{\nu}\\
&= \frac{1}{8}R_{\kappa\lambda\mu\nu}dx^{\kappa}\vee dx^{\lambda}\vee dx^{\mu}\otimes dx^{\nu},
\end{aligned}$$

pois o tensor de curvatura é antissimétrico nos dois últimos argumentos vetoriais, i.e., vale a igualdade

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}.$$

Isso garante a existência da solução do seguinte "problema de Cauchy não-homogêneo"

$$\left\{\begin{array}{c}
\delta^{-1}\left(\partial r+\frac{i}{\hbar}r^{2}\right)-r=\delta^{-1}R\\
\\
r\in\mathcal{W}_3\otimes\Omega^{1}(M)\\
\\
\delta^{-1}r=0
\end{array}\right. \tag{24}$$

Para unicidade, suponha que haja duas soluções, e seja w a sua diferença. Então, w será solução do seguinte "problema de Cauchy homogêneo"

$$\left\{\begin{array}{c}
\delta^{-1}\left(\partial w+\frac{i}{\hbar}w^{2}\right)-w=0\\
\\
w\in\mathcal{W}_3\otimes\Omega^{1}(M)\\
\\
\delta^{-1}w=0
\end{array}\right. .$$

Ocorre que a única solução possível para esse último problema é a seção identicamente nula. Com efeito, se o termo não-nulo de grau mais baixo de uma solução w tivesse grau $g<\infty$, então o termo não-nulo de grau mais baixo de $\delta^{-1}\partial w$ teria grau $g+1$, ao passo que o termo não-nulo de grau mais baixo de $\delta^{-1}w^{2}$ teria grau $2g+1$. Absurdo.

Reciprocamente, admita que r é solução de (23). Nesse caso, a nilpotência do operador δ^{-1} (vide identidade (1) do Lema 10) garante que toda solução de (23) satisfaz automaticamente a condição de calibre $\delta^{-1}r = 0$. Vamos mostrar que r é solução de (21). Isso equivale a mostrar que a seção A definida pela diferença dos dois membros de (21), i.e., por

$$A = \delta r - R - \partial r - \frac{i}{\hbar} r^2 \tag{25}$$

é a seção identicamente nula.

Primeiramente, vejamos que a seção A definida acima é solução do seguinte "problema de Cauchy homogêneo"

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta A - \partial A - \left[\frac{i}{\hbar} r, A\right] = 0 \\ \delta^{-1} A = 0 \end{array} \right. . \tag{26}$$

De fato, aplicando δ^{-1} a (25), obtemos

$$\begin{aligned} \delta^{-1} A &= \delta^{-1}\delta r - \delta^{-1}\left(R + \partial r + \frac{i}{\hbar} r^2\right) \\ &= \delta^{-1}\delta r - r \quad \text{ por (23)} \\ &= 0 \quad \text{ por (22)}, \end{aligned}$$

ao passo que, aplicando δ a (25), obtemos

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta\delta r - \delta\left(R + \partial r + \frac{i}{\hbar} r^2\right) \\ &= -\delta R - \delta\partial r - \frac{i}{\hbar}\delta\left(r^2\right) \quad \text{ pelo lema 10, id. (1)} \\ &= -\delta R - \delta\partial r - \frac{i}{\hbar}\left[\delta r, r\right] \quad \text{ lema10, id. (3)} \\ &= -\delta R + \partial\delta r + \frac{i}{\hbar}\left[r, \delta r\right] \quad \text{ lema 12, id. (1).} \end{aligned}$$

Ora, calculando δR (use a ação do operador δ em monômios, dada por (9)), obtemos

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta\left(\frac{1}{4} R_{\kappa\lambda\mu\nu} dx^\kappa \vee dx^\lambda \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu\right) \\ &= \frac{1}{4} R_{\kappa\lambda\mu\nu} \delta\left(dx^\kappa \vee dx^\lambda \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu\right) \\ &= \frac{1}{4} R_{\kappa\lambda\mu\nu}\left(dx^\lambda \otimes dx^\kappa \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu + dx^\kappa \otimes dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(R_{\kappa\lambda\mu\nu} + R_{\lambda\kappa\mu\nu}\right) dx^\kappa \otimes dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois as componentes do tensor de curvatura satisfazem

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}.$$

Assim, temos

$$\delta A = \partial\delta r + \frac{i}{\hbar}\left[r, \delta r\right]. \tag{27}$$

Calculemos agora os termos ∂A e $\left[\frac{i}{\hbar}r, A\right]$ a partir da definição (25).

$$\partial A = \partial\delta r - \partial R - \partial^2 r - \frac{i}{\hbar}\partial\left(r^2\right).$$

Temos:

$$\partial R = 0 \text{ (conseqüência da segunda identidade de Bianchi)}$$

$$\partial^2 r = \left[\frac{i}{\hbar}R, r\right] \qquad \text{(pelo Lema 12, id. (2))}$$

e

$$\frac{i}{\hbar}\partial\left(r^2\right) = \left[\partial r, \frac{i}{\hbar}r\right] \qquad \text{(pelo Lema 11, id. (1))},$$

donde segue que

$$\partial A = \partial\delta r - \left[\frac{i}{\hbar}R, r\right] - \left[\partial r, \frac{i}{\hbar}r\right]. \tag{28}$$

Temos ainda:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{i}{\hbar}r, A\right] &= \left[\frac{i}{\hbar}r, \delta r - R - \partial r - \frac{i}{\hbar}r^2\right] \\
&= \left[\frac{i}{\hbar}r, \delta r\right] - \left[\frac{i}{\hbar}r, R\right] - \left[\frac{i}{\hbar}r, \partial r\right] - \left[\frac{i}{\hbar}r, \frac{i}{\hbar}r^2\right] \\
&= \left[\frac{i}{\hbar}r, \delta r\right] + \left[\frac{i}{\hbar}R, r\right] + \left[\partial r, \frac{i}{\hbar}r\right],
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\partial A + \left[\frac{i}{\hbar}r, A\right] = \partial\delta r + \left[\frac{i}{\hbar}r, \delta r\right],$$

que, juntamente com (27), dá

$$\delta A - \left(\partial A + \left[\frac{i}{\hbar}r, A\right]\right) = \partial\delta r + \frac{i}{\hbar}\left[r, \delta r\right] - \partial\delta r - \left[\frac{i}{\hbar}r, \delta r\right] = 0,$$

i.e.,

$$\delta A - \partial A - \left[\frac{i}{\hbar}r, A\right] = 0, \tag{29}$$

que é o que faltava para verificar (26).

Estamos agora em condições de mostrar que A é a seção identicamente nula.

Aplicando δ^{-1} a (29), obtemos

$$\delta^{-1}\delta A - \delta^{-1}\left(\partial A + \left[\frac{i}{\hbar}r, A\right]\right) = 0,$$

donde, usando a decomposição de Hodge-de Rham (12) de A juntamente com a condição $\delta^{-1}A = 0$ ($\Rightarrow A_{00} = 0$), vem

$$A = \delta^{-1}\left(\partial A + \left[\frac{i}{\hbar}r, A\right]\right).$$

Vemos então recursivamente que cada termo da seção A se anula, como queríamos mostrar.

Isso encerra a prova do teorema. ■

A conexão abeliana D dada pelo teorema acima é chamada *a conexão de Fedosov associada a* ∇.

Definição 15 *Seja* $D : \Omega^{\bullet}(M, W) \to \Omega^{\bullet+1}(M, W)$ *uma conexão de Fedosov no (super)fibrado de Weyl.*

Uma seção $a \in \mathcal{W}$ *é dita horizontal com relação a* D *quando satisfaz* $Da = 0$.

O conjunto das seções horizontais com relação a D *é denotado por* $\mathcal{W}_D$ *e chamado* álgebra horizontal *de* D.

O fato de que $\mathcal{W}_D$ é de fato uma $C^{\infty}(M)-$subálgebra de $\mathcal{W}$ decorre do fato trivial de ser D uma derivação da $C^{\infty}(M)-$álgebra $\mathcal{W}$.

Teorema 16 *Seja* $D : \Omega^{\bullet}(M, W) \to \Omega^{\bullet+1}(M, W)$ *uma conexão de Fedosov no (super)fibrado de Weyl.*

Para cada seção central $b \in \mathcal{Z} \simeq C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ *existe uma unica seção horizontal* $a \in \mathcal{W}_D$ *tal que* $b = \sigma(a)$.

Prova. Lançaremos mão novamente de argumentos de recursão.

Seja $b \in \mathcal{Z} \simeq C^{\infty}(M)[[\hbar]]$ uma seção central.

Desejamos mostrar que o problema

$$\begin{cases} Da = 0 \\ a_0 = b \end{cases} \tag{30}$$

tem uma única solução.

Uma tal solução certamente satisfará $\delta^{-1}a = 0$, pois não tem parte antissimétrica, por hipótese.

A condição de horizontalidade $Da = 0$ pode ser reescrita como

$$\delta a = \partial a + \left[\frac{i}{\hbar}r, a\right],$$

por causa de (20).

Aplicando δ^{-1}, obteríamos, devido à decomposição de Hodge-de Rham (12) e às condições $\delta^{-1}a = 0$ e $a_0 = b$,

$$a = b + \delta^{-1}\left(\partial a + \left[\frac{i}{\hbar}r, a\right]\right). \tag{31}$$

Suponha que o problema (30) admita duas soluções, e seja w a diferença entre elas. De (31) segue que

$$w = \delta^{-1}\left(\partial w + \left[\frac{i}{\hbar}r, w\right]\right).$$

Por um argumento recursivo idêntico ao utilizado na prova do teorema anterior concluimos que $w = 0$.

Portanto, se existir, a solução de (30) é mesmo única.

Resolvendo (31) recursivamente para a, obtemos uma seção $a \in \mathcal{W}$ tal que $\sigma(a) = b$.

O fato de que $A \equiv Da = 0$ segue de cálculos análogos aos desenvolvidos na demonstração do teorema anterior, mostrando-se que a superseção $A \in \Omega^1(M, W)$ satisfaz às condições $\delta^{-1}A = 0$ e $DA = D^2 a = 0$. ■

Este último teorema nos diz que a aplicação símbolo σ (7) induz uma bijeção entre $\mathcal{W}_D$ e $C^\infty(M)[[\hbar]]$, que denotaremos pelo mesma letra σ. Podemos usar essa bijeção para transportar a estrutura algébrica de $\mathcal{W}_D$ para $C^\infty(M)[[\hbar]]$. O pull-back do produto de Weyl $\circ$ em $\mathcal{W}_D$ para $C^\infty(M)[[\hbar]]$ via σ, que denotaremos por $\star$, é o que chamamos *produto de Fedosov*, dado por

$$a(\hbar) \star b(\hbar) \equiv \sigma\left(\sigma^{-1}(a(\hbar)) \circ \sigma^{-1}(b(\hbar))\right).$$

Verifica-se facilmente que $\star$ é um produto-estrela hermiteano, segundo a definição 4, dada na seção 1.