Campos de vetores sobre o espaço projetivo, a generalização da questão de Poincaré e dois teoremas demonstrados por E. Esteves

Altemar Brito Lima

IMPA

18 de dezembro de 2010

Resumo

H. Poincaré em [Poi91] considerou a seguinte questão: é possível limitar o grau das curvas C deixadas invariantes por um campo de vetores X sobre $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$? Mostraremos que em geral a resposta é não e apresentaremos a prova dada por E. Esteves em [Est00] do seguinte teorema: Se $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ é uma hipersuperfície suave de grau d invariante por um campo vetorial X não nulo sobre $\mathbb{P}^n$ de grau m, então $d \leqslant m+1$. Além disso daremos exemplos do porquê esse teorema falha se tirarmos a hipótese de suavidade ou codimensão 1.

1 Introdução

Denotando por $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos e por $\mathbb{P}^n$ o espaço projetivo de dimensão n sobre $\mathbb{C}$ abordaremos a questão levantada por H. Poincaré em [Poi91]: é possível limitar o grau das curvas planas C deixadas invariantes por um campo de vetores X sobre $\mathbb{P}^2$? Tal limitante é procurado em termos do único invariante do campo, o grau. Veremos que em geral a resposta é não.

Digamos que $deg(X) = m$ e $deg(C) = d$. Durante os anos foram obtidos limitantes para d em termos de m impondo alguma condição sobre o campo ou sobre a curva. Por exemplo, se as singularidades de X são não dicríticas, então M. Carnicer mostrou em [Car94] que $d \leqslant m+2$. Se as singularidades de C são no máximo nós ordinários, então

D. Cerveau e A. Lins Neto mostraram em [CN91]. Se C tem singularidades piores ou X é dicrítico, as desigualdades acima não valem. Para esses casos, desigualdades mais fracas foram encontradas por A. Campillo e M. Carnicer em [CC97].

Também abordaremos a questão que generaliza a de Poincaré: é possível limitar o grau das variedades V deixadas invariantes por um campo de vetores X sobre $\mathbb{P}^n$? Veremos que em geral a resposta também é não. Mas também foram encontrados limitantes sob certas condições. Por exemplo, se V é uma hipersuperfície invariante por um campo de grau m, M. Soares mostrou em [Soa97] que se V é suave e tem grau d , então $d \leqslant m+1$, enquanto que M. Brunella e L.G. Mendes mostraram em [BM00] que se $deg(V) \leqslant m+n$, então V tem no máximo singularidades "normal-crossing".

Quando uma curva $C \subset \mathbb{P}^n$ é uma interseção completa de hipersuperfícies de graus $d_1, ..., d_{n-1}$ e invariante por um campo X de grau m, M. Soares mostrou em [Soa00] que quando C é suave, então $\sum d_i \leqslant m+n-1$, enquanto que Campillo, Carnicer e J. García mostraram em [CCGdlF00] que quando C tem no máximo nós ordinários como singularidades, então $\sum d_i \leqslant m+n$.

Assim como M. Soares, E. Esteves em [Est00] também mostrou que quando uma hipersuperfície V, suave e de grau d, é invariante por um campo de grau m, então $d \leqslant m+1$, veja teorema 2 na pág. 22. Mas a prova Esteves é algébrica e segundo ele mesmo tal prova se deve a uma observação por O. Zariski que foi publicada por J. Lipman em [Lip65]. Além disso seu trabalho dá uma caracterização dos campos em $\mathbb{P}^n$ que deixam uma hipersuperfície suave invariante, veja teorema 1 na pág. 22. Tal prova se utiliza de muitos resultados técnicos de Álgebra Comutativa que não são apresentados em seu trabalho.

Nosso objetivo é entender a prova dada por Esteves e tal caracterização. Para isso apresentaremos as definições e resultados de Álgebra Comutativa (localização, sequência regular, dimensão de Krull, etc) e Geometria Algébrica (variedades afim e projetiva e sua dimensão, topologia de Zariski, etc) necessários e faremos toda a construção da teoria de campos de vetores sobre $\mathbb{P}^n$ e explicaremos o que significa um tal campo deixar uma variedade dentro de $\mathbb{P}^n$ invariante. Além disso daremos exemplos do porquê esse teorema falha se tirarmos a hipótese de suavidade ou codimensão 1.

2 Um pouco de Álgebra Comutativa

No que segue R denota um anel e M um R-módulo. As três últimas proposições são essenciais para entendermos a prova apresentada por Esteves.

Definição 1. *Um sistema multiplicativo S de R é um subconjunto de R tal que:*
i) $1 \in S$*;*
ii) $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$*.*

Exemplo 1. *Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de R, então $S := R \setminus \mathfrak{p}$ é um sistema multiplicativo.*

Definição 2. *Seja S um sistema multiplicativo de R, então a localização de R com relação a S é definida por*

$$R_S := \{\frac{a}{s}; a \in R, s \in S\}/ \sim$$

onde

$$\frac{a}{s} \sim \frac{b}{t} \Leftrightarrow \exists u \in S; (at - bs)u = 0$$

Quando $\mathfrak{p}$ for um ideal primo de R denotaremos por $R_{\mathfrak{p}}$ a localização de R com relação a $S = R \setminus \mathfrak{p}$.

Proposição 1. *Temos que:*
i)$\sim$ defini uma relação de equivalência;
ii)R_S é um anel definindo:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

$$\frac{a}{s} \bullet \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

iii)O mapa

$$\varphi : R \longrightarrow R_S$$

$$r \mapsto \frac{r}{1}$$

é um homomorfismo de anéis.
iv) Todos os ideais de R_S são da forma IR_S onde I é um ideal de R (disso segue que se R é noetheriano, então R_S também é);
v) Cada ideal primo $\widetilde{\mathfrak{p}}$ de R_S é da forma $\mathfrak{p}R_S$ com $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R disjunto de S (tomamos $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\widetilde{\mathfrak{p}})$, e contrariamente, $\mathfrak{p}R_S$ é um ideal primo de R_S para cada tal $\mathfrak{p}$.
vi)Se $\mathfrak{p} \in Spec(R)$, então $(R_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ é um anel local, isto é, um anel que só tem um ideal

maximal..

vii)Se $\overline{S}$ denota a imagem de S em R/I, então

$$R_S/IR_S \cong (R/I)_{\overline{S}}$$

Demonstração. Veja no livro de H. Matsumura [Mat86], pág. 22 e 23. □

Definição 3. *Temos que:*
i)$Spec(R)$ denota o conjunto dos ideais primos $\wp$ de R;
ii) Para $m \in M$, $Ann(m) := \{r \in R; rm = 0\}$ é chamado o anulador de m. $Ann(M) := \{r \in R; rm = 0, \forall m \in M\}$ é chamado o anulador de M. Os dois são ideais de R;
iii) $Ass(M) := \{\wp \in Spec(R); \wp = Ann(m), m \in M\}$ é chamado de conjunto dos ideais primos associados a M;
iv)Seja $r \in R$. Se existe $0 \neq m \in M$ talque $rm = 0$, então dizemos que r é um divisor de zero de M. Caso contrário dizemos que r é um não divisor de zero de M ou que ele é M-regular. Denotaremos por $DZ(M)$ o conjunto dos divisores de zero de M.

Observação 1. *Segue diretamente dessas definições que:*
i)Seja $\varphi : M \to N$ um isomorfismo de R-módulos e $n = \varphi(m)$, então $Ann(n) = Ann(m)$ e portanto $Ass(M) = Ass(N)$;
ii)Se N é um submódulo de M, então $Ass(N) \subseteq Ass(M)$.

A partir de agora assumiremos que R é noetheriano e que M é finitamente gerado, tais hipóteses não são necessárias para todos os resultados que virão, faremos isso apenas por comodidade e porque é o caso que precisamos. (Para mais detalhes veja o livro de E. Kunz [Kun85] pág. 176).

Lema 1. *$\forall \wp \in Spec(R)$, $Ass(R/\wp) = \{\wp\}$. Além disso, $\forall 0 \neq m \in R/\wp$, $Ann(m) = \wp$.*

Demonstração. Tome $m = r + \wp; r \notin \wp$. É claro que $\wp \subseteq Ann(m)$. Se $s \in R$ e $sm = 0$, então $sr \in \wp$, logo $s \in \wp$. □

Lema 2. *Seja N um submódulo de M, então $Ass(N) \subseteq Ass(M) \subseteq Ass(N) \cup Ass(M/N)$.*

Demonstração. Só temos que provar a segunda inclusão. Seja $\wp \in Ass(M) \setminus Ass(N)$. Então $\wp = Ann(m)$ tal que $m + N \neq N$. Vamos provar que $\wp = Ann(m + N)$. Como $\wp m = 0$, então $\wp \subseteq Ann(m + N)$. Por outro lado, tome $r \in Ann(m + N)$, então $rm \in N$. Se $rm \neq 0$, $Rm \cap N \neq (0)$. Assim N teria um submódulo isomorfo a um submódulo não nulo de $R/\mathfrak{p}$. Pelo Lema 1 e pela Obs. 1, $\mathfrak{p} \in Ass(N)$ o que contradiz nossa hipótese. Assim $rm = 0$ e portanto $r \in \mathfrak{p}$. $\square$

Proposição 2. *Se $M \neq (0)$, então $Ass(M) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Seja $C = \{Ann(m); 0 \neq m \in M\}$. Como $Ann(m) = R \Leftrightarrow m = 0$ e $M \neq (0)$, então C é uma família própria e não vazia de ideais de R. Como R é noetheriano segue C tem um elemento maximal $\mathfrak{p}$. Vamos mostrar que $\mathfrak{p}$ é primo. Digamos que $\mathfrak{p} = Ann(m')$ e sejam $a, b \in R$ tais que $b \notin \mathfrak{p}$ e $ab \in \mathfrak{p}$. Então $\mathfrak{p} \subseteq Ann(bm') \in C$. Pela maximalidade de $\mathfrak{p}$ temos que $\mathfrak{p} = Ann(bm')$. Como $abm' = 0$, segue que $a \in \mathfrak{p}$. $\square$

Proposição 3. $DZ(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass(M)} \mathfrak{p}$

Demonstração. Claro que $DZ(M) \supseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass(M)} \mathfrak{p}$. Se existe $r \in R$ e $0 \neq m \in M$ tal que $rm = 0$, como $Rm \neq (0)$, pela Prop. 2 temos que $Ass(Rm) \neq \emptyset$. Seja $\mathfrak{p} \in Ass(Rm) \subseteq Ass(M)$. Então $\mathfrak{p} = Ann(r'm)$ e como $rm = 0$, segue que $r \in \mathfrak{p}$. $\square$

Proposição 4. *Existe uma cadeia de submódulos*

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq ... \supsetneq M_k = (0)$$

tal que para $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $M_i/M_{i+1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ com $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$.

Demonstração. Se $M = (0)$, ok. Se não tomemos C a coleção de submódulos de M para os quais vale a proposição. $C \neq \emptyset$ e como M é Noetherian podemos, analogamente a prova da Prop. 2, garantir que C contem um elemento maximal N. Se $N \neq M$, então $M/N \neq (0)$. Pela Prop. 2 existe $\mathfrak{p} = Ann(\overline{m}) \in Ass(M/N)$. Assim $\mathfrak{p} \cong R\overline{m}$. Se $\pi : M \to M/N$ é o mapa canônico, então $N' := \pi^{-1}(R\overline{m})$ é um submódulo de M que contem propriamente N. Além disso, $N'/N \cong R\overline{m} \cong R/\mathfrak{p}$ e isso contraria a maximalidade de N. Portanto $M = N$. $\square$

Lema 3. *Seja $I \subseteq R$ um ideal tal que $I \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup ... \cup \mathfrak{p}_k$ onde cada $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$. Então $I \subseteq \mathfrak{p}_i$ para algum i.*

Demonstração. Façamos indução sobre k. Se $k = 1$, ok. Suponhamos que o resultado vale para $k-1$. Se para algum i tivermos que $I \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup ... \cup \widehat{\mathfrak{p}_i} \cup ... \cup \mathfrak{p}_k$, acabou. Caso contrário, para cada i, existe $a_i \in I$ que só está em $\mathfrak{p}_i$. Definindo $a = \sum_{i=1}^{k} a_1 ... \widehat{a_i} ... a_n$ teremos que a está em algum $\mathfrak{p}_i$, assim $a_1 ... \widehat{a_i} ... a_n \in \mathfrak{p}_i$. Logo, para algum $i \neq j$, teremos que $a_j \in \mathfrak{p}_i$. Contradição. $\square$

Proposição 5. *Temos que:*

i)Ass(M) é finito;

ii) Seja $I \subseteq R$ um ideal tal que $I \subseteq DZ(M)$, então existe $0 \neq m \in M$ tal que $Im = (0)$.

Demonstração. i)

Pela Prop. 4 $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq ... \supsetneq M_k = (0)$ e para $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $M_i/M_{i+1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ com $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$.

Pelo Lema 2, $Ass(M) \subseteq Ass(M_1) \cup Ass(M/M_1)$.

Pelo Lema 1 e Obs. 1, $Ass(M/M_1) = \{\mathfrak{p}_0\}$.

Pelo Lema 2, $Ass(M_1) \subseteq Ass(M_2) \cup Ass(M_1/M_2)$.

Pelo Lema 1 e Obs. 1, $Ass(M_1/M_2) = \{\mathfrak{p}_1\}$. E assim sucessivamente. Portanto $Ass(M) \subseteq \{\mathfrak{p}_0, ..., \mathfrak{p}_{k-1}\}$. □

Demonstração. ii)

Pela Prop. 3 e pelo item anterior, $I \subseteq DZ(M) = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_l\}$. Pelo Lema 3, $I \subseteq \mathfrak{p}_i = Ann(m), 0 \neq m \in M$. □

Definição 4. *Diremos que uma sequência $\{a_1, ..., a_n\}$ de elementos de R é uma sequência M-regular se valem duas condições:*

i)$(a_1, ..., a_n)M \neq M$;

ii)Para $i = 1, ..., n-1$, a_i é não divisor de zero de $M_i := M/(a_1, ..., a_{i-1})M$. (Obs. $M_1 = M$)

Exemplo 2. *Se $R = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$, então $\{t_1, ..., t_n\}$ é uma sequência R-regular pois para $i = 1, ..., n$, $R_i := R/(t_1, ..., t_{i-1})R$ é um domínio.*

Seja I um ideal de R tal que $IM \neq M$. Para qualquer sequência $\{a_1, ..., a_n\}$,M-regular, temos por definição que $(a_1)M \subsetneq (a_1, a_2)M \subsetneq ... \subsetneq (a_1, ..., a_n)M \subsetneq M$. Como M é Noetherian segue que qualquer sequência $\{a_1, ..., a_n\} \subset I$ que é M-regular pode ser estendida a uma tal sequência *maximal*, isto é, uma sequência $\{a_1, ..., a_k\} \subset I$ com $k \geqslant n$ que é M-regular e tal que $I \subseteq DZ(M/(a_1, ..., a_k)M)$.

Exemplo 3. *Se $R = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$, então $\{t_1, ..., t_n\}$ é uma sequência R-regular maximal em $I = (t_1, ..., t_n)$.*

Lema 4. *Se $\{a, b\}$ é uma sequência M-regular e $b \notin DZ(M)$, então $\{b, a\}$ também é uma sequência M-regular*

Demonstração. $b \notin DZ(M)$, então só temos que mostrar que $a \notin DZ(M/bM)$. Suponhamos que $am = bm'$ com $m, m' \in M$. Como $b \notin DZ(M/aM)$, então $m' = am''$ e assim $am = bam''$. Como $a \notin DZ(M)$, então $m = bm''$. $\square$

Proposição 6. *Quaisquer duas sequências M-regulares maximais em I tem o mesmo número de elementos.*

Demonstração. Suponhamos que a sequência regular em I mais curta tem n elementos. Façamos indução sobre n.

Se $n = 0$, então $I \subseteq DZ(M)$ e não há o que fazer.

Se $n > 0$, sejam $\{a_1, ..., a_n\}$ uma sequência regular maximal em I e $\{b_1, ..., b_n\}$ uma sequência regular em I. Vamos mostar que $\{b_1, ..., b_n\}$ é maximal, isto é, $I \subseteq DZ(M/(b_1, ..., b_n)M)$.

Se $n = 1$, então $I \subseteq DZ(M/a_1M)$. Pela Prop. 5 existe $m \in M \setminus a_1M$ tal que $Im \subseteq a_1M$. Em particular $b_1m = a_1m'$, $m' \in M$. Além disso $m' \notin b_1M$ pois caso contrário, usando o fato que $b_0 \notin DZ(M)$, teríamos que $m \in a_0M$ o que é absurdo. Assim temos $a_1Im' = b_1Im \subseteq a_1b_1M$, como $a_1 \notin DZ(M)$, então $Im' \subseteq b_1M$. Logo $I \subseteq DZ(M/b_1M)$.

Suponhamos que $n > 1$. Sejam $M_i = M/(a_1, ..., a_{i-1})M$ e $M'_i = M/(b_1, ..., b_{i-1})M$ onde $1 \leqslant i \leqslant n$. Do fato que $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$ e $\{b_1, ..., b_{n-1}\}$ são M-regulares e pelas Prop. 3 e 5 e pelo Lema 3 existe $c \in I \setminus \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} (DZ(M_i) \cup DZ(M'_i))$. Assim $\{a_1, ..., a_{n-1}, c\}$ e $\{b_1, ..., b_{n-1}, c\}$ são sequências M-regulares em I sendo que a primeira é maximal pela aplicação do caso $n = 1$ ao módulo M_n. Aplicando repetidamente o Lema 4 temos que $\{c, a_1, ..., a_{n-1}\}$ e $\{c, b_1, ..., b_{n-1}\}$ são sequências M-regulares em I e a primera é maximal. Como $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$ e $\{b_1, ..., b_{n-1}\}$ são sequências M/cM-regulares em I e a primera é maximal temos por hipótese de indução que a segunda também é. Portanto $\{b_1, ..., b_{n-1}, c\}$ é M-regular maximal e aplicando o caso $n = 1$ a M'_n temos que $\{b_1, ..., b_n\}$ é M-regular maximal em I. $\square$

Definição 5. *Seja $I \subset R$ um ideal tal que $IM \neq M$, então chamaremos o número de elementos de uma sequência M-regular maximal em I de profundidade de M em I e o denotaremos por $d(I, M)$. Em particular, se R é local com ideal maximal η denotaremos por $d(M)$ o valor $d(\eta, M)$ e o chamaremos de profundidade de M.*

Observação 2. *Segue diretamente da Prop. 6 que para qualquer sequência* $\{a_1, ..., a_i\} \subset I$, *$M$-regular, temos que* $d(I, M/(a_1, ..., a_i)M) = d(I, M) - i$.

Lema 5. *Lema de Nakayama: seja* (R, η) *um anel local Noetherian e* M *um* R*-módulo finitamente gerado tal que* $M = \eta M$, *então* $M = (0)$

Demonstração. Veja no livro de Q. Liu, pág. 9. □

Proposição 7. *Seja* (R, η) *um anel local noetheriano e* $M \neq 0$ *um* R*-módulo finitamente gerado, então*

$$d(M) \leqslant Min_{\text{þ} \in Ass(M)} \{dim R/\text{þ}\}$$

Demonstração. Façamos indução sobre $n = d(M)$.

Se $n = 0$, ok.

Vamos assimir que existe $a \in \eta \setminus DZ(M)$ e que a proposição é para módulos com profundidade $n - 1$. Pela Obs. 2, $d(M/aM) = d(M) - 1$, então

$$d(M) - 1 = d(M/aM) \leqslant Min_{\text{þ'} \in Ass(M/aM)} \{dim R/\text{þ'}\}$$

Assim basta mostrarmos que

$$Min_{\text{þ'} \in Ass(M/aM)} \{dim R/\text{þ'}\} < Min_{\text{þ} \in Ass(M)} \{dim R/\text{þ}\}$$

Para isso vamos mostrar que para cada þ $\in Ass(M)$ existe þ' $\in Ass(M/aM)$ tal que þ $\subsetneq$ þ' pois assim teremos que $dim R/$þ' $< dim R/$þ.

Para þ $\in Ass(M)$ temos que $a \notin$ þ. Como para qualquer þ' $\in Ass(M/aM)$ temos que $a \in$ þ', então nunca podemos ter þ $=$ þ'. Vamos tentar encontrar um submódulo $U \neq (0)$ de M/aM tal que þ$U = (0)$, pois com isso deve existir þ' $\in Ass(U) \subseteq Ass(M/aM)$ e consequentemente þ $\subsetneq$ þ'.

$N := \{m \in M; \text{þ}m \subseteq aM\}$ é um submódulo de M diferente de (0) pois ele contem $N' := \{m \in M; \text{þ}m = (0)\}$ e þ $\in Ass(M)$, assim $N' \neq (0)$. N/aM é submódulo de M/aM e þ$N/aM = (0)$. Devemos ter $N/aM \neq (0)$. Suponha que $N = aM$. Assim, em particular, para todo $m' \in N'$ temos $m' = am$, $m \in M$. Como þ$m' = (0) =$ þ$am = (0)$ e $a \notin DZ(M)$ temos que þ$m = (0)$ e assim $m \in N'$. Dessa forma $N' = aN'$. Como $a \in \eta$, pelo Lema de Nakayama temos $N' = (0)$, absurdo. Assim $N \neq\neq aM$ e definindo $U := N/aM$ temos o submódulo $\neq (0)$ de M/aM desejado. □

Fixemos $a_0, ..., a_n \in R$ onde $n \geqslant 1$ e R é um anel qualquer. Para cada $1 \leqslant l \leqslant n$ consideremos R^{l+1} como o R-módulo livre como base canônica $\{e_0, ..., e_l\}$ e vamos definir o 2-ésimo produto exterior de R^{l+1}, representado por $\bigwedge^2 R^{l+1}$, como o R-módulo livre de dimensão $\binom{n}{2}$ com base

$$B_l = \{e_i \wedge e_j; 0 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

Vamos também definir os seguintes mapas R-lineares:

$$\begin{array}{lcl} \varphi_l : \bigwedge^2 R^{l+1} \to R^{l+1} & e & \psi_l : R^{l+1} \to R \\ e_i \wedge e_j \mapsto a_j e_i - a_i e_j & & (r_0, ..., r_l) \mapsto \sum_{i=0}^{l} r_i a_i \end{array}.$$

É fácil verificar que $\psi_l \circ \varphi_l = 0$, isto é, $Im(\varphi_l) \subseteq Ker(\psi_l)$ para $1 \leqslant l \leqslant n$. Os R-módulos e mapas acima são uma parte do chamado *complexo de Koszul associado a* $\{a_0, ..., a_n\}$, para mais informações sobre isso veja [Mat86] pág. 127 e 128 onde é provado que uma sequência $\{a_0, ..., a_n\}$ é R-regular se, e somente se, seu complexo de Koszul associado é exato. Mas nós não percisamos de tanto. Vamos mostar apenas que:

Proposição 8. *Se $\{a_0, ..., a_n\}$ uma sequência R-regular, então $Im(\varphi_l) = Ker(\psi_l)$ para $1 \leqslant l \leqslant n$.*

Demonstração. Façamos indução sobre l. Como já foi observado acima $Im(\varphi_l) \subseteq Ker(\psi_l)$ para $1 \leqslant l \leqslant n$, assim só precisamos mostrar que $Im(\varphi_l) \supseteq Ker(\psi_l)$ para $1 \leqslant l \leqslant n$. O mais importante é darmos uma boa cara para $Im(\varphi_l)$.

$$Im(\varphi_l) = \left\{ \sum_{0 \leq i < j \leq n} r_{i,j}(a_j e_i - a_i e_j); r_{i,j} \in R \right\}$$

Tomando um elemento da imagem temos

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} r_{i,j}(a_j e_i - a_i e_j) = (r_{0,1}a_1 + r_{0,2}a_2 + ... + r_{0,n}a_n)e_0 +$$

$$+(-r_{0,1}a_0 + r_{1,2}a_2 + ... + r_{1,n}a_n)e_1 + (-r_{0,2}a_0 - r_{1,2}a_1 + r_{2,3}a_3 ... + r_{2,n}a_n)e_2 + ...$$

$$... + (-r_{0,n}a_0 + r_{1,n}a_1 + ... + r_{n-1,n}a_{n-1})e_n$$

Assim

$$Im(\varphi_l) = \left\{ (y_0, ..., y_k, ..., y_l) \in R^{l+1}; y_k = \sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k}a_i + \sum_{j=k+1}^{l} r_{k,j}a_j \right\} \qquad (1)$$

onde cada $r_{i,j} \in R$ e entendemos que $\sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k}a_i = 0$ se $k = 0$ e $\sum_{j=k+1}^{l} r_{k,j}a_j = 0$ se $k = l$.

Quando $l = 1$ temos que $Im(\varphi_1) = \{r(a_1, -a_0); r \in R\}$.

$$(p_0, p_1) \in Ker(\psi_1) \Rightarrow p_0 a_0 + p_1 a_1 = 0 \Rightarrow p_1 a_1 = -p_0 a_0$$

como $\{a_0, a_1\}$ é R-regular, então $p_1 = -r_{0,1} a_0$e substituindo na equação anterior temos

$$-r_{0,1} a_0 a_1 = -p_0 a_0 \Rightarrow p_0 = r_{0,1} a_1 \Rightarrow (p_0, p_1) = r_{0,1}(a_1, -a_0)$$

Suponhamos que o resultado vale para $l = n - 1$.

Para $l = n$ temos que

$$(p_0, ..., p_n) \in Ker(\psi_n) \Rightarrow p_0 a_0 + ... + p_n a_n = 0 \Rightarrow p_n a_n = -p_0 a_0 - ... - p_{n-1} a_{n-1}$$

Como $\{a_0, ..., a_n\}$ é R-regular, então $p_n = -r_{0,n} a_0 - ... - r_{n-1,n} a_{n-1}$ e substituindo na equação anterior temos

$$(p_0 - r_{0,n} a_n) a_0 + ... + (p_{n-1} - r_{n-1,n} a_n) a_{n-1} = 0$$

Assim $(p_0 - r_{0,n} a_n, ..., p_{n-1} - r_{n-1,n} a_n) \in Ker(\psi_{n-1}) = Im(\varphi_{n-1})$. Por (1) temos para $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ que

$$p_k - r_{k,n} a_n = \sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k} a_i + \sum_{j=k+1}^{n-1} r_{k,j} a_j$$

sendo que $\sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k} a_i = 0$ se $k = 0$ e $\sum_{j=k+1}^{n-1} r_{k,j} a_j = 0$ se $k = n - 1$. Pela expressão que encontramos para p_n temos que $r_{n,n} = 0$ e assim para $0 \leqslant k \leqslant n$

$$p_k = \sum_{i=0}^{k-1} -r_{i,k} a_i + \sum_{j=k+1}^{n} r_{k,j} a_j$$

Novamente por (1) segue que $(p_0, ..., p_n) \in Im(\varphi_n)$. □

Definição 6. *A dimensão de Krull de um anel R é definida por $dim(R) = sup\{n; \mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_n \subsetneq R\}$, onde cada $\mathfrak{p}_i$ da sequência é um ideal primo.*

Exemplo 4. *Se $R = \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$, então $dim(R) = n$.*

3 Um pouco de Geometria Algébrica

Até o fim desse trabalho: $\mathbb{P}^n$ denota o espaço projetivo de dimensão n sobre o copo dos complexos $\mathbb{C}$ e denotaremos seus pontos por $t = (t_0 : \cdots : t_n)$; $R = \mathbb{C}[t_o, ..., t_n]$ e $R(m)$ é o conjunto dos elementos de R que são homogêneos de grau m; para $F \in R$, $\partial_i F := \frac{\partial_i F}{t_i}$.

Como $\mathbb{C}$ é um corpo, todos os ideais de R são finitamente gerados. Diremos que um ideal $I \in R$ é *homogêneo* quando ele puder ser gerado por elementos homogêneos de R. Para este tipo de ideal faz sentido definirmos

$$Z(I) = \{t \in \mathbb{P}^n; F(t) = 0, \forall F \in R\}$$

que chamaremos de *lugar dos zeros de I* em $\mathbb{P}^n$. De fato se $I = (F_1, \cdots, F_s)$, então $Z(I) = \{t \in \mathbb{P}^n; F_i(t) = 0, \forall i\}$. Chamaremos esse tipo de subconjunto de $\mathbb{P}^n$ de *algébrico*. $\mathbb{P}^n$ é um espaço topológico declarando que os fechados são os subconjuntos algébricos. Por outro lado, dado $V \subseteq \mathbb{P}^n$ chamaremos de $I(V)$ o ideal de R gerado por todos os elementos homogêneos de R que são identicamente nulos sobre V.

Dado um ideal $I \in R$ definimos o *radical de I*, $\sqrt{I}$, como o subconjunto de R formado pelos elementos F tal que para algum $n \in \mathbb{N}$, $F^n \in I$. De fato isso $\sqrt{I}$ é um ideal de R e homogêneo quando I for. Quando $\sqrt{I} = I$ dizemos que I é um *ideal radical*.

Proposição 9. *(Teorema dos Zeros Projetivo)* $I(Z(\mathrm{I})) = \sqrt{\mathrm{I}}$ *a não ser que* $I = (t_0, \cdots, t_n)$.

Demonstração. Veja [Mum99], pág. 8. □

A partir de agora chamaremos os fechados de $\mathbb{P}^n$ de *Variedades Projetivas*. Se $V \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma variedade tal que $I(V) = (F)$, onde $F \in R(d) \setminus \{0\}$, $d > 0$, então dizemos que V é uma *hipersuperfície de grau d*.

Uma variedade projetiva $V \subseteq \mathbb{P}^n$ é dita *irredutível* se ela não pode ser escrita como união de subvariedades, caso contrário ela é dita *redutível*. Quando I e J são ideais de R homogêneos e $I \subseteq J$, então é fácil ver que $Z(J) \subseteq Z(I)$ e usando o fato que R é noetheriano e por isso não admite cadeias ascendentes infinitas de ideais segue que em $\mathbb{P}^n$ não existem cadeias descencentes infinitas de fechados e por isso é possível provar que qualquer variedade $V \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma união finita de fechados irredutíveis $V = V_1 \cup ... \cup V_s$ e se $V_i \nsubseteq V_j$ para $i \neq j$ então esses fechados são únicos e chamados de *componentes irredutíveis* de V. (Para uma prova disse veja [Kun85], pág. 13)

Definição 7. *Seja* V *uma variedade irredutível em* $\mathbb{P}^n$ *e* $I(V)$ *o seu ideal associado. Definimos* $dim(V) := dim(R/I(V))$ *como a dimensão de* V. *Se* V *é redutível e tem componentes* $V_1, ..., V_s$, *então definimos* $dim(V) := max_{1 \leqslant i \leqslant s}\{dim(V_i)\}$.

Proposição 10. *Deve-se a Krull os seguintes resultados:*

i) Se $V \subseteq \mathbb{P}^n$ *é uma variedade irredutível de dimensão* d *e* H *é uma hipersuperfície tal que*

$V \cap H \neq \emptyset$ *e* $V \nsubseteq H$, *então cada componente irredutível de* $V \cap H$ *em* $\mathbb{P}^n$ *tem dimensão* $d-1$.

ii) Sejam $F_1, ..., F_r \in R$ *homogêneos, então cada componente irredutível de* $Z(F_1, ..., F_r)$ *tem dimensão pelo menos* $n-r$.

Demonstração. Veja [Kun85], pág. 132. □

Definição 8. *Seja* $V \subseteq \mathbb{P}^n$ *uma variedade projetiva tal que* $I(V) = (F_1, \cdots, F_s)$ *onde os* F_i*'s são polinômios homogêneos. Para* $v \in V$ *definimos o Espaço Tangente a* V *em* v *como*

$$T_vV = Z\left(\sum_i \partial_i F_1(v)t_i, ..., \sum_i \partial_i F_s(v)t_i\right)$$

Por definição isso é uma variedade projetiva.

Para qualquer variedade projetiva V e para qualquer ponto $v \in V$ temos que $dimV \leqslant dimT_vV$ (veja [Sha94] pág. 93). Quando vale a igualdade dizemos que *V é suave no ponto v*, caso contrário dizemos que *v é uma singularidade de V*. Quando V for suave em todos os seus pontos dizemos que *V é suave.* O caso que mais nos interessa nesse trabalho é quando $I(V) = (F)$, onde $F \in R(d) \setminus \{0\}$, $d > 0$. Para este caso já sabemos por Krull que $dimV = n-1$, então temos que mostrar que $dimT_vV \geqslant n-1$. Como $T_vV = \{t \in \mathbb{P}^n; \langle \nabla F(v), t\rangle = 0\} = Z(\sum_i \partial_i F(v)t_i)$, pelo teorema dos zeros projetivo, $I(T_vV) = \sqrt{(\sum \partial_i F(v)t_i)} = (\sum \partial_i F(v)t_i)$. Se $\partial_i F(v) = 0, \forall i$, então $T_vV = \mathbb{P}^n$ que tem dimensão n, caso contrário, T_vV é uma hipersuperfície e portanto tem dimensão $n-1$. Além disso, pela fórmula de Euler $dF = \sum_i t_i \partial_i F$, então podemos concluir que

Proposição 11. *Seja* $V \subseteq \mathbb{P}^n$ *uma variedade projetiva tal que I(V)=(F), onde* $F \in R(d) \setminus \{0\}$, $d > 0$, *então*

i) $\forall v \in V$, $v \in T_vV$ *pois* $\langle \nabla F(v), v\rangle = dF(v) = 0$;

ii) $Z(\partial_0 F, \cdots, \partial_n F) \subseteq Z(F)$;

iii) Se V *é suave, então* $Z(\partial_0 F, \cdots, \partial_n F) = \varnothing$.

4 Campos vetoriais sobre $\mathbb{P}^n$ e a questão de H. Poincaré

Definição 9. *Um campo vetorial poninomial ou simplesmente um campo vetorial sobre* $\mathbb{C}^{n+1}$ *é um mapa*

$$\omega = (G_0, ..., G_n) : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$$

$$z = (z_0, ..., z_n) \mapsto \omega(z) = (G_0(z), ..., G_n(z))$$

onde para todo i, $G_i \in R$. Se além disso para todo i, $G_i \in R(m)$, dizemos que ω é um campo vetorial homogêneo de grau m.

Denotaremos por CV o conjunto dos campos vetoriais sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ e por $CV(m)$ o subconjunto de CV formado pelos campos vetoriais homogêneos de grau m. CV tem uma estrutura natural de $\mathbb{C}$-espaço vetorial definindo para cada $z \in \mathbb{C}$ e $\omega = (G_0, ..., G_n) \in CV$ o campo $z\omega := (zG_0, ..., zG_n)$.

Dados $G_0, ..., G_n \in R$ podemos construir uma *derivação* $\mathbb{C}$-linear sobre R, isto é, um homomorfismo de grupo

$$\sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i : R \to R$$

$$F \mapsto \sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i F$$

tal que para quaisquer $F_1, F_2 \in R$ e $z \in \mathbb{C}$:
i)$(\sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i)(F_1 F_2) = F_1(\sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i F_2) + F_2(\sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i F_1)$ (regra de Leibniz) ;
ii) $(\sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i)(zF_1) = z(\sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i F_1)$ ($\mathbb{C}$-linearidade).
(Obs. Para mais informações sobre derivação veja [Eis95], pág. 385).

O conjunto $D := \{\sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i; G_i \in R\}$ formado por todas as derivações como acima também tem uma estrutura natural de $\mathbb{C}$-espaço vetorial definindo para cada $z \in \mathbb{C}$ e $\sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i \in D$ a derivação $z \sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i := \sum_{i=0}^{n} zG_i \partial_i$.

Proposição 12. *CV e D são espaços vetoriais isomorfos.*

Demonstração. O mapa

$$\varphi : CV \to D$$

$$\omega = (G_0, ..., G_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i$$

é claramente um homomorfismo de grupos $\mathbb{C}$-linear sobrejetivo. Se $\omega = (G_0, ..., G_n)$ e $\varphi(\omega) = 0$, então $\sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i F = 0$ para todo $F \in R$. Em particular, tomando $F = t_j$ teremos que $G_j = \sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i t_j = 0$ para $j = 1, ..., n$. Logo $\omega = 0$. $\square$

A partir de agora também chamaremos os elementos de D de campos vetoriais sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ e de $D(m)$ a imagem pelo mapa φ de $CV(m)$, isto é, $D(m) = \{\sum_{i=0}^{n} G_i \partial_i; G_i \in R(m)\}$.

Um campo vetorial interessante é o de *Euler*, $E := \sum_{i=0}^{n} t_i \partial_i$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $ER(m-1) := \{\sum_{i=0}^{n} Ft_i\partial_i; F \in R(m-1)\}$. Temos que $E(m)$ é um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $D(m)$, então faz sentido falar no quociente.

Definição 10. *Diremos que* $\dfrac{D(m)}{E(m)}$ *é o conjunto dos campos vetoriais homogêneos de grau m sobre* $\mathbb{P}^n$. *Representaremos um tal campo por* X *e diremos que ele é induzido por* $\omega = \sum_{i=0}^{n} G_i\partial_i$ *quando este estiver na classe* X.

Essa definição reside em dois fatos:

i) diferente do caso afim, para que um mapa polinomial $\omega = (G_0, ..., G_n) : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ faça sentido é preciso que os polinômios sejam homogêneos e de mesmo grau.

ii) no caso afim, temos interesse em olhar para a direção dada pelo campo em um ponto que é definida pelo vetor que liga o ponto a sua imagem. Quando um ponto é igual a sua imagem dizemos que ele é uma singularidade do campo. No caso projetivo não faz sentido tal vetor, então olharemos para a reta em $\mathbb{P}^n$ que passa pelo ponto e sua imagem. Observe que para qualquer ponto $p \in \mathbb{P}^n$ e qualquer elemento $\sum_{i=0}^{n} Pt_i\partial_i \in ER(m-1)$ temos que $(Pt_0(p) : ... : Pt_n(p)) = p$ ou não está definido e assim não faz sentido tal reta, por isso é feito o quociente por $ER(m-1)$.

Na tentativa de uma analogia com o caso afim, podemos tentar ver um campo vetorial X, digamos induzido por $\omega = \sum G_i\partial_i$ com $mdc(G_0, ..., G_n) \in \mathbb{C}$ (pedimos isso para que $Z(G_0, ..., G_n)$ não contenha uma hipersuperfície), como um mapa racional

$$X_\omega : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$t = (t_o : ... : t_n) \mapsto X_\omega(t) = (G_0(t_o, ..., t_n) : ... : G_n(t_o, ..., t_n))$$

Chamaremos a reta em $\mathbb{P}^n$ passando por t e $X_\omega(t)$ de *direção dada por* X_ω *em* t e a representaremos por $r_{tX_\omega(t)}$. O mapa acima e a direção estão bem definidos exatamente fora da variedade $S_{X_\omega} := Z(I_{X_\omega}) \subseteq \mathbb{P}^n$, onde I_{X_ω} é o ideal gerado pelos menores 2×2 da matriz

$$\mathbf{M}_{\mathbf{X}_\omega} = \begin{pmatrix} t_0 & \dots & t_n \\ G_0 & \dots & G_n \end{pmatrix}.$$

Observação 3. *A variedade projetiva* S_{X_ω} *não depende do representante* ω.

Demonstração. Se X também for induzido por $\tilde{\omega} := \sum_{i=0}^{n} H_i\partial_i$, então existe $F \in R(m-1)$ tal que

$$(*) G_i = Ft_i + H_i, \forall i$$

assim

$$t_iG_j - t_jG_i = t_i(Ft_j + H_j) - t_j(Ft_i + H_i) = t_iH_j - t_jH_i$$

e portanto $Z(I_{X_\omega}) = Z(I_{X_{\tilde{\omega}}})$. $\square$

Denotaremos por S_X o conjunto $Z(I_{X_\omega})$ e o chamaremos de conjunto das singularidades de X.

Observação 4. *Se $t = (t_o : ... : t_n) \notin S_X$, então a direção dada por X_ω em t não depende do representante ω.*

Demonstração. Vamos seguir a notação da observação acima. Seja $A := X_\omega(t)$, então

$$r_{tA} = \{(pt_0 + qG_0(t) : \cdots : pt_n + qG_n(t)); (p : q) \in \mathbb{P}^1\}$$

$(*)$ implica que $H_i(t) = -F(t)t_i + G_i(t), \forall i$. Tomando $(p : q) = (-F(t) : 1)$ temos que $B := X_{\tilde{\omega}}(t) \in r_{tA}$. Como $t \notin S_X$, pela observação acima existe r_{tB}, em particlular, $B \neq t$. Logo $r_{tB} = r_{tA}$. $\square$

Para $t \notin S_X$ denotaremos por $r_{tX(t)}$ a reta $r_{tX_\omega(t)}$ e a chamaremos de direção dada por X em t.

Exemplo 5. *Seja X um campo vetorial homogêneo de grau m sobre $\mathbb{P}^n$, digamos induzido por $\omega = \sum G_i\partial_i$. Se os polinômios G_i's forem gerais, então S_X é finito e tem $1 + m + m^2 ... + m^n$ elementos.*

Definição 11. *Seja $V \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Dizemos que um campo vetorial X em $\mathbb{P}^n$ é tangente a V ou que X deixa V invariante se para cada ponto $v \in V \setminus S_X$ temos que a direção dada por X em v pertence a T_vV.*

Exemplo 6. *O campo 0 de grau $m \in \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{P}^n$ deixa qualquer variedade $V \subseteq \mathbb{P}^n$ invariante.*

Proposição 13. *Seja $V \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade tal que $I(V) = I = (F_1, ..., F_s)$, onde os F_i's são polinômios homogêneos. Então um campo vetorial X sobre $\mathbb{P}^n$ induzido por $\omega = \sum G_i\partial_i$ deixa V invariante se, e somente se, $\sum G_i\partial_iF \in I$ para todo $F \in I$.*

Demonstração. Seja S_X o lugar dos pontos singulares de X. Vimos na pág. 12 que para $v \in V$, $T_vV = Z\left(\sum_i \partial_iF_1(v)t_i, ..., \sum_i \partial_iF_s(v)t_i\right)$.

($\Leftarrow$) Se $V \subseteq S_X$ acabou. Se não, tome $v \in V \setminus S_X$, como T_vV é uma interseção de hiperplanos basta mostrar que $X_\omega(v) = (G_0(v), ..., G_n(v))$ está em todos eles. Por hipótese temos em particular que $\sum_i G_i\partial_i F_j \in I$ para $1 \leqslant j \leqslant s$ e portanto $\sum_i G_i(v)\partial_i F_j(v) = 0$ para $1 \leqslant j \leqslant s$.

($\Rightarrow$) É suficiente mostrar que $\sum_i G_i\partial_i F_j \in I$ para $1 \leqslant j \leqslant s$ e isso ocorre se $\sum_i G_i\partial_i F_j = 0$ em V para $1 \leqslant j \leqslant s$. Se existe $v \in V \setminus S_X$, então por definição $X_\omega(v) \in T_vV$. Logo $\sum_i G_i(v)\partial_i F_j(v) = 0$. Se $v \in V \cap S_X$ então $X_\omega(v) = 0$ ou $X_\omega(v) = v$, de qualquer modo temos $\sum_i G_i(v)\partial_i F_j(v) = 0$ para $1 \leqslant j \leqslant s$. □

Poincaré considerou a seguinte questão: *Seja X um campo vetorial em $\mathbb{P}^2$. Será possível limitar o grau das curvas planas deixadas invariantes por X através do grau do campo?*

A resposta é não.

Exemplo 7. *Para cada natural $d \geq 2$, sejam $R = \mathbb{C}[t_o, t_1, t_2]$, C_d a curva em $\mathbb{P}^2$ de grau d tal que $I(C_d) = (F = t_0t_1^{d-1} - t_2^d)$ e X_d o campo em $\mathbb{P}^2$ de grau 1 induzido por $\sum G_i\partial_i$, onde: $G_0 = (d-1)t_0$, $G_1 = -t_1$ e $G_2 = 0$. Então X_d deixa C_d invariante para cada d.*

Demonstração. Pela proposição 3.2 temos que checar que $\sum G_i\partial_i F \in (F)$. Temos que

$$\sum G_i\partial_i F = (d-1)t_0t_1^{d-1} - t_1(d-1)t_0t_1^{d-2} = 0$$

Observe que para $v = (v_o : ... : v_n) \in C_d$ temos que

$$T_vC_d = Z(v_1^{d-1}t_0 + (d-1)v_0v_1^{d-2}t_1 - dv_2^{d-1}t_2)$$

Em particular, se $d = 2$, $T_vC_2 = Z(v_1t_0 + v_0t_1 - 2v_2t_2)$ e então C_2 é suave, mas para $d \geqslant 3$ temos que $(1 : 0 : 0)$ é uma singularidade de C_d. □

O exemplo acima mostra que suavidade é importante.

Consideremos a questão que generaliza a considerada por Poincaré: *Seja X um campo vetorial em $\mathbb{P}^n$. Será possível limitar o grau das curvas em $\mathbb{P}^n$ deixadas invariantes por X através do grau do campo?*

Como era de se esperar a resposta é não. Basta "copiarmos" o exemplo acima.

Exemplo 8. *Para cada natural $d \geqslant 2$, sejam $R = \mathbb{C}[t_o, ..., t_n]$, C_d a curva em $\mathbb{P}^n$ de grau d tal que $I(C_d) = (F_1 = t_0t_1^{d-1} - t_2^d, F_2 = t_3, ..., F_n = t_n)$ e X_d o campo em $\mathbb{P}^n$ de grau 1 induzido por $\sum G_i\partial_i$, onde: $G_0 = (d-1)t_0$, $G_1 = -t_1$ e $G_i = 0$ para $i \geqslant 2$. Então X_d deixa C_d invariante para cada d.*

Demonstração. Análogo ao último exemplo. Também observe que para $v = (v_o : ... : v_n) \in C_d$ temos que $T_vC_d = Z(v_1^{d-1}t_0 + (d-1)v_0v_1^{d-2}t_1 - dv_2^{d-1}t_2, t_3, ..., t_n)$. Se $d = 2$, então C_d é suave, mas para $d \geqslant 3$ temos que $p = (1 : 0 : ... : 0)$ é uma singularidade de C_d pois para esse ponto temos que $T_pC_d = Z(t_3, ..., t_n)$ que é isomorfo a $\mathbb{P}^2$ e portanto tem dimensão 2. □

Agora deveríamos nos perguntar se suavidade é suficiente. Atacaremos a seguinte questão: *Seja X um campo vetorial em $\mathbb{P}^n$. Será possível limitar o grau das curvas suaves em $\mathbb{P}^n$ deixadas invariantes por X através do grau do campo?*

Mais uma vez a resposta é não.

Exemplo 9. *Para cada natural $d \geqslant 1$, vamos definir o mapa:*

$$\varphi_d : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$$

$$s = (s_o : s_1) \mapsto \varphi_d(s) = (s_0^d : s_0^{d-1}s_1 : s_0s_1^{d-1} : s_1^d)$$

Seja C_d a curva imagem. Temos que C_d é isomorfa a $\mathbb{P}^1$ e portanto é suave. Além disso ela tem grau d e olhando para os pontos de $\mathbb{P}^3$ em coordenadas $(t_o : ... : t_3)$ temos que $I = I(V) = (F_1 = t_1t_2 - t_0t_3, F_2 = t_1^{d-1} - t_2t_0^{d-2}, F_3 = t_2^{d-1} - t_1t_3^{d-2})$. O campo vetorial X_d de grau 1 em $\mathbb{P}^3$ induzido por $\omega = dt_0\partial_0 + (d-2)t_1\partial_1 - (d-2)t_2\partial_2 - dt_3\partial_3$ deixa C_d invariante para cada d.

Demonstração. Temos que:

$$\omega(F_1) = -dt_0t_3 + (d-2)t_1t_2 - (d-2)t_2t_1 + dt_3t_0 = 0$$

$$\omega(F_2) = -d(d-2)t_2t_0^{d-2} + (d-2)(d-1)t_1^{d-1} + (d-2)t_2t_0^{d-2} =$$

$$= (d-2)(d-1)(t_1^{d-1} - t_2t_0^{d-2}) \in I$$

$$\omega(F_3) = -(d-2)t_1t_3^{d-2} - (d-2)(d-1)t_2^{d-1} + d(d-2)t_1t_3^{d-2} =$$

$$= -(d-1)(d-2)(t_2^{d-1} - t_1t_3^{d-2} \in I$$

□

Este exemplo mostra que apenas suavidade não é suficiente, a codimensão também é importante. No caso acima temos codimensão dois e podemos dar exemplos com codimensão l para todo $l \geqslant 2$. Basta "copiarmos" o exemplo acima. Assim a questão que mais generaliza a levantada por Poincaré: *Seja X um campo vetorial em $\mathbb{P}^n$. Será possível limitar o grau das variedades em $\mathbb{P}^n$ deixadas invariantes por X através do grau do campo?* também tem resposta negativa em geral.

Exemplo 10. *Para cada natural $d \geqslant 1$, vamos definir o mapa:*

$$\varphi_d : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{1+l}$$

$$s = (s_o : s_1) \mapsto \varphi_d(s) = (s_0^d : s_0^{d-1}s_1 : s_0s_1^{d-1} : s_1^d : 0 : ... : 0)$$

Seja C_d a curva imagem. Temos que C_d é isomorfa a $\mathbb{P}^1$ e portanto é suave. Além disso ela tem grau d e olhando para os pontos de $\mathbb{P}^{l+1}$ em coordenadas $(t_o : ... : t_{l+1})$ temos que $I = I(V) = (F_1 = t_1t_2 - t_0t_3, F_2 = t_1^{d-1} - t_2t_0^{d-2}, F_3 = t_2^{d-1} - t_1t_3^{d-2}, F_4 = t_4, ..., F_{l+1} = t_{l+1})$. O campo vetorial X_d de grau 1 em $\mathbb{P}^{l+1}$ induzido por $\omega = dt_0\partial_0 + (d-2)t_1\partial_1 - (d-2)t_2\partial_2 - dt_3\partial_3$ deixa C_d invariante para cada d.

Demonstração. Análogo ao exemplo anterior. □

5 Os dois teoremas demonstrados por Esteves

Segundo a Prop. 13, dada uma hipersuperfície V em $\mathbb{P}^n$ tal que $I(V) = (F)$ com $F \in R(d)$ podemos facilmente construir um campo vetorial que a deixe invariante, por exemplo o induzido por

$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} P_{i,j}(\partial_j F \partial_i - \partial_i F \partial_j) \qquad (2)$$

onde $P_{i,j} \in R(k)$ para todo par (i, j), pois

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} P_{i,j}(\partial_j F \partial_i F - \partial_i F \partial_j F) = 0 \in (F)$$

No sentido contrário E. Esteves provou em [Est00], pág. 6, o seguinte teorema que, como ele mesmo garante, se baseia nas idéias de O. Zariski que foram publicadas por J. Lipman em [Lip65], Parte c do Exemplo 7, pág. 892. O interessante é que esse teorema dá uma caracterização dos campos em $\mathbb{P}^n$ que deixam uma hipersuperfície suave invariante.

Teorema 1. *Seja $V \subseteq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície e $F \in R(d)$ tal que $I(V) = (F)$. Se V é suave, então cada campo vetorial X em $\mathbb{P}^n$ que deixa V invariante é induzido por uma expressão como em (2) com todos os $P_{i,j} \in R(k)$ para algum $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Digamos que X é induzido por $\sum G_i\partial_i$ onde os $G_i \in R(m)$. Pela Prop. 13 existe $P \in R$ tal que

$$\sum G_i\partial_i F = PF \tag{3}$$

Como $F \in R(d)$ e $G_i \in R(m)$ para cada i, então $\partial_i F \in R(d-1)$ para cada i e $P \in R(m-1)$.

Vamos separar a prova em dois casos.

Se V for um hiperplano, por uma mudança de coordenadas podemos supor que $F = t_0$, então por (3) temos que $G_0 = Pt_0$. Definindo $P_{i,j} = Pt_j - G_j$ para $i = 0, 1 \leqslant j \leqslant n$ e $P_{i,j} = 0$ caso contrário, temos que

$$\sum_{i<j} P_{i,j}(\partial_j F\partial_i - \partial_i F\partial_j) = \sum_{0<j} -P_{0,j}\partial_j = \sum_{0\leqslant j} -P_{0,j}\partial_j$$

onde $P_{0,0} = 0$. Assim

$$\sum_{0\leqslant j} G_j\partial_j - \sum_{0\leqslant j} -P_{0,j}\partial_j = \sum_{0\leqslant j}(G_j + P_{0,j})\partial_j = \sum_{0\leqslant j} Pt_j\partial_j \in ER(m-1)$$

Logo X é induzido por uma expressão do tipo desejado.

Suponhamos agora que $d \geqslant 2$. Abrindo a expressão em (2) temos:

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} P_{i,j}(\partial_j F\partial_i - \partial_i F\partial_j) = (P_{0,1}\partial_1 F + P_{0,2}\partial_2 F + \dots + P_{0,n}\partial_n F)\partial_0 +$$

$$+(-P_{0,1}\partial_0 F + P_{1,2}\partial_2 F + \dots + P_{1,n}\partial_n F)\partial_1 + (-P_{0,2}\partial_0 F - P_{1,2}\partial_1 F + P_{2,3}\partial_3 F \dots + P_{2,n}\partial_n F)\partial_2 + \dots$$

$$\dots + (-P_{0,n}\partial_0 F + P_{1,n}\partial_1 F + \dots + P_{n-1,n}\partial_{n-1} F)\partial_n$$

Observe que as coordenadas desse campo são combinações das derivadas parciais de F parecidas com as que aparecem em (1) na pág. 9. Um caminho para chegar a expressão que queremos é usar a Prop. 8 na pág 9, mas primeiro vamos modificar o representante do campo.

Pela fórmula de Euler

$$\sum t_i\partial_i F = dF \tag{4}$$

isolando F em (4) e substituindo em (3) obtemos

$$\sum (G_i - \frac{t_i P}{d})\partial_i F = 0$$

Definindo $\tilde{G}_i = G_i - \frac{t_i P}{d}$ (obs.: $\tilde{G}_i \in R(m)$) temos

$$\sum \tilde{G}_i\partial_i F = 0$$

além disso $\sum \tilde{G}_i \partial_i$ claramente induz o campo X Então para terminarmos basta mostrarmos que $\{\partial_0 F, ..., \partial_n F\}$ forma uma sequência R-regular e aplicarmos a Prop. 8. Essa é a parte mais difícil desse teorema.

Seja $I := (\partial_0 F, ..., \partial_n F)$. Como V é suave pelas Prop. 11 e 9 temos que $Z(\sqrt{I}) = Z(I) = \emptyset$. Como $d \geqslant 2$, temos que $IR \neq R$, além disso $deg(\partial_i F) = d - 1 \geqslant 1$ para cada i.

Vamos mostrar a seguinte proposição que vai garantir que $\{\partial_0 F, ..., \partial_n F\}$ forma uma sequência R-regular.

Proposição 14. *Sejam $F_0, ..., F_n$ elementos de $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ homogêneos e de grau positivo tal que $\mathbb{P}^n \supseteq Z(F_0, ..., F_n) = \emptyset$, então $\{F_0, ..., F_n\}$ forma uma sequência $\mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$-regular.*

Demonstração. Vamos demonstrar as seguintes afirmativas:
i) Para $0 \leqslant i \leqslant n$, cada componente irredutível de $Z(F_0, ..., F_i)$ tem dimensão $n - i - 1$.
ii)$d(R_\eta) = n + 1$ e $\{F_0, ..., F_n\} \subset \eta$. Onde $\eta = (t_0, ..., t_n) \subset R := \mathbb{C}[t_0, ..., t_n]$ e R_η é a localização de R com relação ao sistema multiplicativo $R \setminus \eta$.
iii)$\{F_0, ..., F_n\}$ forma uma sequência R_η-regular.
iv) $\{F_0, ..., F_n\}$ forma uma sequência R-regular.

Demonstração. i)Vale pois $Z(F_0, ..., F_n) = \emptyset$ em $\mathbb{P}^n$ e pela Prop. 10 na pág. 11. □

Demonstração. ii)$(R_\eta, \eta R_\eta)$ é um anel local. Mostremos que $\{t_0, ..., t_n\}$ formam uma sequência R_η-regular. Como R_η é um domínio, então $t_0 \notin DZ(R_\eta)$. Para $0 < i \leqslant n$, suponhamos que

$$t_i \frac{G_i}{H_i} = t_0 \frac{G_0}{H_0} + ... + t_{i-1} \frac{G_{i-1}}{H_{i-1}}$$

onde $\frac{G_j}{H_j} \in R_\eta$ para cada j. Assim

$$t_i G_i H_0 ... H_{i-1} = t_0 G_0 \widehat{H_0} H_1 ... H_i + ... + t_{i-1} G_{i-1} H_0 ... H_{i-2} \widehat{H_{i-1}} H_i$$

Como $\{t_0, ..., t_n\}$ formam uma sequência R-regular, então $G_i H_0 ... H_{i-1} = t_0 P_0 + ... + t_{i-1} P_{i-1}$. Definido $A =: H_0 ... H_{i-1} \notin \eta$ temos que

$$\frac{G_i}{H_i} = t_0 \frac{G_0}{AH_i} + ... + t_{i-1} \frac{G_{i-1}}{AH_i}$$

Portanto $\{t_0, ..., t_n\}$ formam uma sequência R_η-regular e é claro que ela é maximal.

Além disso $\{F_0, ..., F_n\} \subset \eta$ pois esses polinômios são homogêneos e de grau positivo.

□

Demonstração. iii)Para $0 \leqslant i \leqslant n$ seja $M_i =: R_\eta/(F_0, ..., F_{i-1})R_\eta$. Primeiro $F_0 \notin DZ(R_\eta)$ pois este é um domínio. Suponhamos que para $0 < i \leqslant k-1 < n$, $F_i \notin DZ(M_i)$ e que $F_k \in DZ(M_k)$. Pela Prop. 3 na pág. 5 temos $F_k \in \widetilde{\mathfrak{p}_k} \in Ass(M_k)$. Por definição $\{F_0, ..., F_k\} \subset \widetilde{\mathfrak{p}_k}$. Pela Prop. 1 na pág. 3, $\widetilde{\mathfrak{p}_k} = \mathfrak{p}_k R_\eta$ onde $\mathfrak{p}_k \in Spec(R)$, $R_\eta/\mathfrak{p}_k R_\eta \cong (R/\mathfrak{p}_k)_{\overline{\eta}}$ e além disso $dim\left((R/\mathfrak{p}_k)_{\overline{\eta}}\right) \leqslant dim(R/\mathfrak{p}_k)$. Temos que $\{F_0, ..., F_k\} \subset \mathfrak{p}_k$, assim se tomarmos $\mathfrak{p} \subset R$ um divisor primo minimal do ideal $(F_0, ..., F_k)$ temos que $dim(R/\mathfrak{p}_k) \leqslant dim(R/\mathfrak{p})$. Como os divisores primos minimais de $(F_0, ..., F_k)$ estão em correspondência biunívoca com as componentes irredutíveis de $Z(F_0, ..., F_k)$ temos pelo item (i) que $dim(R/\mathfrak{p}) = n-k-1$. Isto é, $dim(R_\eta/\widetilde{\mathfrak{p}_k}) \leqslant n-k-1$.

Como estamos supondo que $\{F_0, ..., F_{k-1}\}$ forma uma sequência R_η-regular temos pela Obs. 2 na pág. 7 que $d(M_k) = d(R_\eta/(F_0, ..., F_{k-1})R_\eta) = d(R_\eta) - k = n - k$.

Temos que $n-k = d(M_k) > dim(R_\eta/\widetilde{\mathfrak{p}_k})$ com $\widetilde{\mathfrak{p}_k} \in Ass(M_k)$. Isso é um absurdo pela Prop. 7 na pág. 8. □

Demonstração. iv)Agora vamos utilizar o fato dos polinômios serem homogêneos. Como R é um domínio sabemos que $F_0 \notin DZ(R)$. Suponhamos que $\{F_0, ..., F_{k-1}\}$ é uma sequência R-regular onde $0 \leqslant k-1 < n$. Se temos que

$$F_k P_k = F_0 P_0 + ... + F_{k-1} P_{k-1}$$

com todos os $P_j' \in R$, então por (iii) temos que

$$P_k = F_0 \frac{G_0}{H_0} + ... + F_{i-1} \frac{G_{i-1}}{H_{i-1}}$$

onde $\frac{G_j}{H_j} \in R_\eta$ para cada j. Assim

$$P_k H_0 ... H_{i-1} = F_0 G_0 + ... + F_{i-1} G_{i-1}$$

Para cada j, $H_j = c_j +$ (termos de grau maior) como $0 \neq c_j \in \mathbb{C}$. Assim $P_k H_0 ... H_{i-1} = cP_k +$ (termos de grau maior), $0 \neq c \in \mathbb{C}$. Como o ideal $(F_0, ..., F_{i-1})$ é homogêneo segue se um polinômio A está nesse ideal, então cada parte homogênea de A está. Logo $P_k \in (F_0, ..., F_{i-1})$ como desejado. □

□

□

Agora segue facilmente o segundo teorema feito por Esteves.

Teorema 2. *Seja X um campo vetorial não nulo sobre $\mathbb{P}^n$ de grau m. Seja $V \subseteq \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície e $F \in R(d)$ tal que $I(V) = (F)$. Se V é suave e invariante por X, então $d \leqslant m + 1$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, o campo X é induzido por uma expressão como em (2) na pág. 18 onde os $P_{i,j} \in R(k)$ para todo par (i, j). Como $X \neq 0$, temos $P_{i,j} \neq 0$ para algum par (i, j). Como $deg(X) = m$ e $deg(F) = d$, então $deg(P_{i,j}) + d - 1 = m$. Como $deg(P_{i,j}) \geq 0$, segue que $d \leqslant m + 1$. □

Referências

[AM94] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Westview Pr, 1994.

[BM00] M. Brunella and LG Mendes, *Bounding the degree of solutions to Pfaff equations, preprint 206, U*, 2000, pp. 593–604.

[Car94] M.M. Carnicer, *The Poincaré problem in the nondicritical case*, Annals of mathematics **140** (1994), no. 2, 289–294.

[CC97] A. Campillo and M.M. Carnicer, *Proximity Inequalities and Bounds for the Degree of Invariant Curves by Foilations of* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, Transactions of the American Mathematical Society **349** (1997), no. 6, 2211–2228.

[CCGdlF00] A. Campillo, MM Carnicer, and J. Garcia de la Fuente, *Invariant curves by vector fields on algebraic varieties*, Journal of the London Mathematical Society **62** (2000), no. 1, 56–70.

[CN91] D. Cerveau and A.L. Neto, *Holomorphic foliations in* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *having an invariant algebraic curve*, Annales de l'institut Fourier, vol. 41, 1991, pp. 883–903.

[Eis95] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer, 1995.

[Est00] E. Esteves, *The Castelnuovo-Mumford regularity of an integral variety of a vector field on projective space*, Arxiv preprint math/0011018 (2000).

[Kap70] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Springer, 1970.

[Kun85] E. Kunz, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*, Birkhauser, 1985.

[LE06] Q. Liu and R. Erné, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford University Press, USA, 2006.

[Lip65] J. Lipman, *Free derivation modules on algebraic varieties*, American Journal of Mathematics **87** (1965), no. 4, 874–898.

[Mat86] H. Matsumura, *Commutative ring theory,Cambridge studies in advanced mathematics 8*, Cambridge Univ Press, 1986.

[Mum99] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes, volume 1358 of Lecture Notes in Mathematics*, 1999.

[Poi91] H. Poincaré, *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rend. Circ. Mat. Palermo **5** (1891), 161–191.

[Sha94] I.R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer, 1994.

[Soa97] M.G. Soares, *The Poincaré problem for hypersurfaces invariant by one-dimensional foliations*, Inventiones mathematicae **128** (1997), no. 3, 495–500.

[Soa00] ———, *Projective varieties invariant by one-dimensional foliations*, Annals of Mathematics **152** (2000), no. 2, 369–382.