Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Prova 3 – Introdução à Álgebra Linear – 2017

Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.
Todos os espaços vetoriais têm dimensão finita.

1. Seja T um operador linear em V e $n = \dim V$.
Prove que $V = \ker T^n \oplus \operatorname{im} T^n$.

2. Seja T um operador nilpotente em V.
Prove que $T + I$ é invertível, de dois modos:

(a) Escrevendo $(T + I)^{-1}$ explicitamente.

(b) Escolhendo uma base de V na qual T tem uma matriz com muitos zeros.

3. Seja V um espaço vetorial real e T um operador auto-adjunto em V tal que $T^m = I$.

(a) Prove que $V = U \oplus W$ com $T|U = id_U$ e $T|W = -id_W$.

(b) Prove que $T = I$ se m é ímpar.

(c) Mostre que podemos ter $T \neq \pm I$ se m é par.

4. Resolva explicitamente

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n + 3y_n, \qquad & x_0 &= 1 \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n, \qquad & y_0 &= 0 \end{aligned}$$