Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Prova 2 – Introdução à Álgebra Linear – 2017

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.
Todos os espaços vetoriais têm dimensão finita.

1. Calcule os valores máximo e mínimo da função quadrática

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

no círculo unitário do plano $\mathbf{R}^2$.

Dica: Escreva $f(v) = \langle Tv, v\rangle$ para algum operador linear T auto-adjunto.

2. Seja V um espaço vetorial complexo com produto interno Hermitiano.

Prove que as seguintes propriedades de um operador linear T são equivalentes:

(a) $|Tv| = |v|$ para todo $v \in V$.

(b) $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$ para todos $u, v \in V$.

(c) $T^*T = I$.

(d) Se $v_1, \ldots, v_n$ é uma base ortonormal, então $Tv_1, \ldots, Tv_n$ é ortonormal.

O que muda na prova quando V é um espaço vetorial real com produto interno?

Um operador linear que satisfaz essas propriedades é chamado uma *isometria*.

3. Seja V um espaço vetorial complexo com produto interno Hermitiano.

Prove que um operador linear T é uma isometria se e somente se V tem uma base ortonormal formada por autovetores de T cujos autovalores têm todos valor absoluto igual a 1.

4. Seja V um espaço vetorial real com produto interno.

É verdade que um operador linear T é uma isometria se e somente se V tem uma base ortonormal formada por autovetores de T cujos autovalores são todos reais e têm valor absoluto igual a 1?

Prove o que for verdade e dê contra-exemplos para o que for falso.

Identidade de polarização real

$$4\langle u, v\rangle = Q(u+v) - Q(u-v)$$

Identidade de polarização complexa

$$4\langle u, v\rangle = Q(u+v) - Q(u-v) + Q(u+iv) - Q(u-iv)$$

onde $Q(v) = \langle v, v\rangle$