Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Prova 1 – Introdução à Álgebra Linear – 2017

impa

Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.
Todos os espaços vetoriais têm dimensão finita.

1. Sejam U, W subespaços de V. Considere $T\colon U \times W \to V$ dada por $T(u, w) = u + w$.

(a) Prove que T é uma transformação linear.

(b) Calcule $\ker T$ e $\operatorname{im} T$.

(c) Relacione $\dim(U + W)$, $\dim(U \cap W)$, $\dim U$, $\dim W$.

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e considere $T\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por $T(B) = AB$.

(a) Calcule a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Calcule o posto de T quando $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Sejam $P, Q\colon V \to V$ transformações lineares tais que

$$P + Q = \mathrm{id}, \quad PQ = 0, \quad QP = 0, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q$$

Prove que $V = \operatorname{im} P \oplus \operatorname{im} Q$, $\operatorname{im} P = \ker Q$, $\operatorname{im} Q = \ker P$.

4. Considere o espaço V dos polinômios de grau no máximo 2 e os seguintes funcionais lineares em V:

$$\varphi_1(p) = p(0), \quad \varphi_2(p) = p(1), \quad \varphi_3(p) = p'(1) = \alpha_1 + 2\alpha_2$$

onde $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$.

(a) Prove que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ é uma base para o espaço dual V^*.

(b) Encontre uma base q_1, q_2, q_3 de V para qual $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ é a base dual.