Introdução à Álgebra Linear 2017 - Lista 6

1. Mostre que a matriz
$$B = \begin{pmatrix} 2015 & 2016 & 2018 \\ 2016 & 2017 & 2016 \\ 2018 & 2016 & 2015 \end{pmatrix}$$
é invertível.

2. Seja
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
Encontrar uma matriz B tal que $B^{-1}AB$ é diagonal.

3. Calcule A^{100} e A^{-7}, onde A é a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

4. Mostre que não existe uma matriz real X de tamanho 2×2 tal que
$$X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-\epsilon \end{pmatrix},$$
onde $\epsilon > 0$.

5. Seja k um número real, $n \geq 2$ um número inteiro e seja $A = (a_{i,j})$ a matriz $n \times n$ tal que todos os elementos na diagonal $a_{i,i} = k$, todas as entradas $a_{i,i\pm 1}$ imediatamente acima e embaixo da diagonal principal são iguais a 1 e o restante das entradas são zero. Sejam λ_{min} e λ_{max} o menor e o maior autovalor de A respetivamente. Mostre que $\lambda_{min} \leq k-1$ e $\lambda_{max} \geq k+1$

6. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz complexa $n \times n$. Mostre que seus autovalores ficam dentro dos n círculos $\mathcal{G}_f^i$ definidos por

$$\mathcal{G}_f^i := \{z \in \mathbb{C}; |z - a_{ii}| \leq r_i\},$$

sendo $r_i = \sum_{j=1 j \neq i}^{n} |a_{ij}|$, para $i = 1, 2, ..., n$. Os círculos $\mathcal{G}_f^i$ são chamados de círculos de Gerschgorin. O subíndice f é para denotar que cada r_i (raio do circulo $\mathcal{G}_f^i$) é obtido a partir da i-ésima fila da matriz A. Mostre que tem um resultado análogo com cérculos $\mathcal{G}_c^i$ cujos raios r_i são agora obtidos da i-ésima coluna da matriz A. Use o resultado para estimar os autovalores da matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

7. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz complexa $n \times n$. Ela e chamada *diagonal dominante* se $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$. Mostre que se A é diagonal dominante, então ela é invertível.

8. Seja $T \colon E \to E$ um operador linear autoadjunto, positivo definido e ortogonal. É verdade que T deve ser a identidade?

9. Apresente um exemplo de um operador linear $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que seja normal, mas não seja ortogonal nem autoadjunto.

10. Um operador linear $A \colon E \to E$ é chamado *nilpotente* se existe um número inteiro k tal que $A^k = 0$. Analise a veracidade da seguinte afirmação: O único operador normal nilpotente é o operador nulo. (Prove se for verdadeira e apresente um contraexemplo se for falso.)

11. Seja A uma matriz quadrada tal que $P(A) = 0$ para algum polinômio P que é produto de fatores lineares distintos. Prove que A é diagonalizável, isto é, existe uma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}AP$ é diagonal.

12. Seja S uma matriz complexa $n \times n$ tal que $S^k = I$ para algum $k \geq 1$. Mostre que S é diagonalizável.

13. Seja S uma matriz real $n \times n$ simétrica tal que $S^k = I$ para algum $K \geq 1$. Prove que $S^2 = I$.