Introdução à Álgebra Linear 2017 - Lista 5

1. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita, e seja $A\colon V \to W$ um mapa linear. Para cada $\omega \in W^*$ considere o mapa $\omega_A\colon V \to \mathbb{R}$ dado por: $\omega_A(v) := \omega(Av)$. Mostre que este mapa é linear. Considere agora o mapa $\overline{A}\colon W^* \to V^*$ dado por $\overline{A}\omega = \omega_A$. Mostre que este mapa é linear. Considere agora produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ em V e W, e mostre que elas induzem isomorfismos $\phi_V\colon V \to V^*$ e $\phi_W\colon W \to W^*$, dados por $\phi_V(v) := \langle v, \cdot \rangle$ e $\phi_W(w) := \langle w, \cdot \rangle$, respectivamente. Finalmente, considere o mapa $\hat{A}\colon W \to V$ dado por $\hat{A} := \phi_V^{-1} \circ \overline{A} \circ \phi_W$ e conclua que $\hat{A} = A^*$, a adjunta do operador A.

2. Uma norma num espaço vetorial E é uma função $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R};\ v \mapsto \|v\|$, tal que:

   (a) $\|v\| \geq 0$, para todo $v \in E$, e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \in E$.

   (b) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, para todo escalar α e $v \in E$.

   (c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, para todo $u, v \in E$.

   Dados E e F, espaços vetoriais, sejam $\| \cdot \|_E$ e $\| \cdot \|_F$ normas em E e F, respeitivamente. Denote $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço vetorial dos mapas lineares de E em F. Defina $\| \cdot \|\colon \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{R}$ pondo

   $$\|A\| := max\{\|Av\|_F; \|v\|_E = 1\}.$$

   Mostre que isto define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$, chamada *norma do operador*, e que vale a desigualdade $\|Av\|_F \leq \|A\| \|v\|_E$.

3. Seja A uma matriz cuadrada $n \times n$. Considerando ela como operador linear no espaço $\mathbb{R}^n$, seja $\|A\|$ a norma do operador induzida por uma norma qualquer de $\mathbb{R}^n$ (veja exercÌcio anterior). Mostre que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, para quaisquer matrices cuadradas $n \times n$. Mostre ainda que se λ é um autovalor da matriz A, então vale $|\lambda| \leq \|A\|$.

4. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule o traço da aplicação linear $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ dada por $T(X) = AXB$.

5. Seja V o espaço vetorial das sequencias (a_n) de números reais. Seja $S : V \to V$ o operador linear definido por

$$S((a_1, a_2, \ldots)) = (a_2, a_3, \ldots).$$

(a) Encontrar os autovetores de S.

(b) Mostrar que o subespaço W das sequencias (x_n) tais que $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ é um subespaço invariante de S de dimensão 2 e exhibir uma base explícita para W de autovetores de S.

(c) A sequencia de números enteiros $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, \ldots, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ é chamada *números de Fibonacci*. Mostre que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

6. Sejam $\theta, \varphi \in [0, 2\pi]$ e seja R uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ tal que a sua matriz na base estándar i, j, k é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Seja $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que na base $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j), j, \frac{1}{\sqrt{2}}(i-k)\}$ a matriz de S é dada por

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostre que $R \circ S$ deixa uma linha invariante.

7. Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uma matriz real com $a, b, c, d > 0$. Mostrar que A possui um autovetor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ com $x, y > 0$.

8. Se for possivel, diagonalize a matrix embaixo, i.e., encontre uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$