Introdução à Álgebra Linear 2017 - Lista 4

1. Considere a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
Mostre que o subespaço V gerado pelos vetores $u = (2, -1, 0)$ e $v = (-1, 2, -1)$ é invariante por A. Descreva a acão da restrição $A|_V$ da matriz A ao subespaço V. Determine a matriz de $A|_V$ na base $\{u, v\}$ de V.

2. Determine todos os subespaços de $\mathbb{R}^2$ que são invariantes pela ação da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Seja T uma matriz $n \times n$, e seja $\mathcal{B} = \{q_1, ..., q_n\}$ uma base em $\mathbb{R}^n$. Se $Q = (q_1| \cdots |q_n)$ é a matriz cujas colunas são os vetores q_j, mostre que a matriz do operador T na base $\mathcal{B}$ é dada por $T_{\mathcal{B}} = Q^{-1}TQ$.

4. Considere a matriz
$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix},$$
e os vetores $q_1 = (2, -1, 0, 0)$ e $q_2 = (-1, 2, -1, 0)$. Verifique que o espaço $V = span\{q_1, q_2\}$ é invariante pela ação de T. Determine uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ na cual o operador T é representado por uma matriz $T_{\mathcal{B}}$ da forma
$$T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

5. Generalize o exercício 4: Suponha que W é um subespaço invariante de $T : V \to V$. Então existe uma representação de T por blocos da forma

$$T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

onde a matriz A representa a restrição de T ao subespaço W.

6. Seja V um espaço vetorial e $W \subset V$ subespaço invariante pela ação das aplicações $S : V \to V$ e $T : V \to V$.

   a) Mostre que W é invariante por $S + T$.

   b) Mostre que W é invariante por $S \circ T$.

   c) Mostre que W é invariante por kT para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

   d) Mostre que W é invariante por $f(T)$ para qualquer polinomio $f(t)$.

7. Mostre que se uma matriz ortogonal A possui autovalores reais, eles somente podem ser iguais a 1 ou -1 (veja o exercício 9 da Lista 3 para a definição de matriz ortogonal).

8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação lineal e $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a matriz de T numa base de $\mathbb{R}^2$. O ***determinante*** de T é definido como sendo $det(A) = ad - bc$.

   a) Calcular $det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right)$.

   b) Mostre que para quaisquer matrizes C e D em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem-se que $det(CD) = det(C)det(D)$. Conclua que o determinante de T não depende da sua representação matricial.

   c) Dê um exemplo de matrices C e D em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $det(C + D) \neq det(C) + det(D)$.

   d) Se uma matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é invertível, mostre que $det(A) \neq 0$ e $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

   e) Calcule $det(xI - C)$ para qualquer matriz C, onde I denota a matriz identidade de tamanho 2×2.

   f) (Cayley-Hamilton em dimensão 2). Mostre que toda matriz $C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ satisfaz a relação $C^2 - (tr(C))C + det(C)I = 0$.

   g) Prove que $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é invertível se e somente se $det(A) \neq 0$.

9. Veja os seguintes exercícios do livro texto: 12.5, 12.6, 12.7, 12.8, 12.16, 12.17, 12.18, 12.22, 12.26, 12.28, 12.29. (Idealmente veja todos os exercícios do livro.)