Introdução à Álgebra Linear 2017 - Lista 3

1. Dadas duas matrizes $m \times n$, A e B, com entradas reais, defina o número real
$$\langle A|B\rangle := tr(A^T B).$$
Mostre que isto define um produto interno no espaço $\mathcal{M}_{m\times n}$ das matrizes reais $m \times n$.

2. Sejam V e W espaços vetoriais munidos de produto interno. Seja $F\colon V \to W$ um mapa sobrejetivo que preserva produto interno, i.e.:
$$\langle u, v\rangle_V = \langle F(u), F(v)\rangle_W$$
para todo $u, v \in V$. Mostre que F é linear. Vale o resultado sem a hipotese de sobrejetividade?

3. Seja $T\colon E \to E$ um mapa que preserva produto interno. Mostre que T leva conjuntos convexos em conjuntos convexos (veja o exercício anterior). Vale o resultado se T preserva apenas a norma induzida pelo produto interno?

4. Considere a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$
Aplique o método de Gram-Schmidt as colunas de A para decompor ela na forma $A = QR$, onde Q é uma matriz com colunas ortonormais e R é uma matriz triangular superior com elementos positivos na diagonal.

5. Seja E um espaço vetorial de dimensão n, e seja E^{**} seu bidual (i.e.: $E^{**} = (E^*)^*$ é o dual do dual do E). Defina um mapa $\phi\colon E \to E^{**}$ do seguinte modo: Para cada $v \in E$, $\phi(v) \in E^{**}$ é definido por $\phi(v)(f) = f(v)$, onde $f \in E^*$. Mostre que ϕ é um isomorfismo linear.

6. Mostre que não existem matrices A e B de tamanho $m \times n$ tais que $A^t B - B^t A = Id_{n\times n}$.

7. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z) = (3x + 4y - 5z, 2x - 6y + 7z, 5x - 9y + z).$$

Encontrar $F^*(x, y, z)$.

8. Uma matriz A é chamada **anti-simétrica** se $A^t = -A$.

   a) Mostre que toda matriz M pode se escrever como soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica.

   b) Mostre que se A é anti-simétrica então A^2 é simétrica.

9. Uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita **ortogonal** se A preserva o produto interno canónico de $\mathbb{R}^n$, (i.e $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$).

   a) Mostre que A é ortogonal se e somente se $A^t A = Id_{n\times n}$.

   b) Mostre que, para $n = 2$, as matrices da forma

   $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   são ortogonais. Mais do que isso, mostre que toda matriz ortogonal de tamanho 2×2 tem aquela forma.

   c) Mostre que se $A = (a_{i,j})$ é uma matriz ortogonal, então $|a_{i,j}| \leq 1$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$.