Introdução à Álgebra Linear 2017 - Lista 2

1. Aplique o método de eliminação de Gauss aos seguintes sistemas (só muda o lado direito das equações) e decida se: tem solução única (no caso, ache a solução); tem infinitas soluções (no caso, ache uma solução), ou não tem soluções (no caso, modifique os dados no lado direito das equações para que o sistema admita alguma solução).

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1|4, \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0|5, \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0|6. \end{aligned}$$

   Obs: Sempre que falamos de soluções, queremos dizer soluções não triviais.

2. O conjunto $\{1, t, ..., t^n\}$ é uma base do espaço dos polinômios em t de grau menor ou igual a n (verifique este fato se não for evidente para você). É possível obter outra base, que seja composta por polinômios de grau n? Se for possível, como você faria para encontrar uma tal base?

3. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço dos polinômios na variável t de grau menor ou igual a 2. Determine a matriz de mudança de bases de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$, onde

$$\mathcal{B} := \{1, t, t^2\} \;\text{ e }\; \mathcal{B}' := \{1, 1+t, 1+t+t^2\}.$$

   Encontre as coordenadas do vetor $q(t) = 3 + 2t + 4t^2$ na base $\mathcal{B}'$.

4. Encontre uma base para o núcleo da transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   e verifique que ele é ortogonal ao espaço V, gerado pelas linhas. Dado $x = (3, 3, 3)$, decomponha-o em uma componente x_1, em V, e outra x_2, no núcleo de A.

5. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

e

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 = 0, x_3 = 2x_4\}.$$

Encontre bases para U, V e $U \cap V$.

6. Seja $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear dada por

$$F(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t).$$

   (a) Determine uma base e a dimensão do núcleo de F.

   (b) Determine uma base e a dimensão da imagem de F.

   (c) Verifique o Teorema do Núcleo e a Imagem para F.

7. Considere a aplicação linear $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$S(x, y) = (2x - 5y, 3x + y).$$

   (a) Determine a representação matricial de S na base $B = \{(2, 1), (3, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

   (b) S é uma aplicação injetiva?

8. Sejam A e B as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Quais as dimensões da matriz produto AB?

   (b) Suponha que $AB = (c_{ij})$, qual é o valor de c_{23} e c_{14}?

9. Veja os seguintes exercícios do livro texto: 5.1, 5.3, 5.4, 5.9, 5.24, 6.4, 6.8, 6.11, 6.17, 6.19, 7.3, 7.7, 7.8, 7,21, 8.1, 8.6, 8.7, 8.21, 8.37, 9.1, 9.2, 9.5, 9.9, 9.14, 9.15