Introdução à Álgebra Linear 2017 - Lista 1

Definições previas: Dado dois espaços vetoriais V e W, e um mapa linear $L : V \to W$, o **núcleo** de L é o conjunto

$$Ker(L) := \{v \in V; L(v) = 0\} \subset V,$$

e a **imagem** de V pelo mapa L (ou simplesmente a imagem de L) e o conjunto

$$Im(L) := \{L(v); v \in V\} \subset W.$$

Dado um conjunto no vazio X, uma relação de equivalencia em X é uma relação binaria entre seus elementos, denotado, para $x, y \in X$, por $x\mathcal{R}y$, tal que:

- R é reflexivo, isto é: $x\mathcal{R}x$ para todo $x \in X$.
- $\mathcal{R}$ é simetrico, isto é: se $x\mathcal{R}y$, então $y\mathcal{R}x$ para todo $x, y \in X$.
- R é transitivo, isto é: se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, então $x\mathcal{R}z$.

1. Com as definições anteriores, mostre que $Ker(L)$ é um subespaço vetorial de V e que $Im(L)$ é um subespaço vetorial de W.

2. Seja V un espaço vetorial e W um subespaço. Defina em V a relação $u \sim v$ se $u - v \in W$. Mostre que isto define uma relação de equivalência. Seja $[v]$ a classe de equivalência do vetor v (i.e., $[v] = \{u \in V; u \sim v\}$. Denote por V/W o conjunto de todas as classes de equivalência de vectores de V. Defina:

$$[u] + [v] = [u + v],$$

$$\alpha[v] = [\alpha v],$$

onde α é um escalar. Mostre que estas operações estám bem definidas (i.e., não dependem do representante escolhido na classe de equivalência). Mostre que con estas definições, o conjunto V/W é un espaço vetorial.

3. Com as notações e definições do problema anterior. Considere o mapa $\pi : V \to V/W$ dado por $\pi(v) = [v]$. Mostre que este mapa é linear y determine seu núcleo.

4. Mostre que um mapa linear $L : V \to W$ é injetivo se e somente se $Ker(L) = \{0\}$.

5. Seja $L : V \to W$ una aplicação linear. Mostre que $V/Ker(L)$ é naturalmente isomorfo a $Im(L)$ (i.e., o isomorfismo não depende de escolha de bases).

6. Sejam V e W subespaços do espaço vetorial E, tais que $E = V \oplus W$. Considere o mapa $\pi_W : E \to W$ definido por $\pi_W(u) = w$, onde $u = v+w$ com $v \in V$ e $w \in W$ de forma única. Mostre que este mapa é linear e que W é isomorfo a E/V. Conclua que dados espaços vetoriais A, B e C tais que $A \oplus B = A \oplus C$, então B é isomorfo a C.

7. Seja $L : V \to W$ um mapa linear, $w \in W$ e $v_0 \in V$ tais que $L(v_0) = w$. Mostre que toda solução da ecuación $L(x) = w$ é da forma $x = v_0 + u$, com $u \in Ker(L)$.

8. Seja $L : V \to V$ um mapa linear tal que $L^2 = L$. Mostre que $V = Ker(L) \oplus Im(L)$.

9. Para este exercício, veja a definição de *conjunto convexo* no exercício 1.18 do livro texto (e faza ele). Seja $L : V \to W$ um mapa linear, $S \subset W$ un conjunto convexo e S' sua preimagen por L (i.e., $S' := \{v \in V; L(v) \in S\}$). Mostre que S' é um conjunto convexo.

10. Veja os seguintes exercícios do livro texto: 2.4, 2.9, 2.22, 2.27, 2.37, 3.3, 3.5, 3.7, 3.14, 3.15, 3.18, 3.29, 4.20, 4.24, 4.25, 4.26, 4.30.