Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Prova 3 de Análise na Reta

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Prove que se

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

então a equação

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

tem uma raiz no intervalo $(0, 1)$.

2. Seja $f\colon X = (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ duas vezes diferenciável tal que f, f' e f'' sejam limitadas. Sejam

$$M_0 = \sup_{x \in X} |f(x)|, \qquad M_1 = \sup_{x \in X} |f'(x)|, \qquad M_2 = \sup_{x \in X} |f''(x)|.$$

Prove que $M_1^2 \leq 4M_0M_2$.

3. Sejam

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad x_n = H_n - \log n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Prove que (x_n) é decrescente e positiva. Conclua que (x_n) converge para um número $\gamma \in [0, 1]$ (chamado a constante de Euler–Mascheroni).

4. Seja $f\colon [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ uma função positiva e decrescente.

Prove que a série $\Sigma f(n)$ converge se e somente se existe

$$\int_1^{+\infty} f = \lim_{n \to \infty} \int_1^n f.$$

Conclua que a série harmônica diverge.