Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Prova 2 de Análise na Reta

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Seja $X = [0,2] \cup (3,5) \subseteq \mathbf{R}$ e $f\colon X \to \mathbf{R}$ uma função contínua em X que só toma valores irracionais. Prove que se $f(1) = f(4)$ então f é constante. O que podemos concluir quando $f(1) \neq f(4)$?

2. O *conjunto de zeros* de uma função $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é

$$Z(f) = \{x \in \mathbf{R} : f(x) = 0\}.$$

(a) Prove que se $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é contínua então $Z(f)$ é fechado.

(b) Encontre uma função $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ contínua tal que $Z(f) = [0,1]$.

(c) Prove que se $X \subseteq \mathbf{R}$ é fechado então existe $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ contínua tal que $Z(f) = X$.

3. O *conjunto de descontinuidade* de uma função $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é

$$D(f) = \{x \in \mathbf{R} : f \text{ não é contínua em } x\}.$$

Encontre uma função $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $D(f) = [0,1]$.

4. Prove que MAX $\Rightarrow$ CUT. Mais precisamente, prove que se num corpo ordenado toda função contínua num intervalo compacto tem um ponto de máximo, então o corpo é completo no sentido de Dedekind, isto é, todo corte é realizado.