Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Prova 1 de Análise na Reta

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Considere a sequência abaixo:

$$x_1 > 0; \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1.$$

Prove que $\lim x_n = +\infty$.

2. Considere a sequência abaixo:

$$x_1 > 0; \qquad x_{n+1} = \sqrt{a x_n}, \quad n \geq 1.$$

onde $a > 0$. Prove que essa sequência converge e calcule o seu limite.

3. Considere as sequências abaixo:

$$a_1 > 0, \quad b_1 > a_1; \qquad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \geq 1.$$

Prove que ambas as sequências convergem e têm o mesmo limite. Calcule esse limite.

[Dica: Prove que $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$. Note que $a_{n+1} = (a_n b_n)/b_{n+1}$.]

4. Prove a série $\sum \frac{n!\, x^n}{n^n}$ converge para $x = 2$ e diverge para $x = 4$.

5. Prove que MON $\Rightarrow$ ARQ. Mais precisamente, prove que se num corpo ordenado toda sequência monótona limitada converge, então o corpo é arquimediano, isto é, $\mathbf{N}$ é ilimitado.