Lista 5 – Análise na Reta – Verão de 2009

Professor: Luiz Henrique de Figueiredo
Monitor: Adriana Neumann, Dalia Bonilla e Tertuliano Franco.

1. Diz-se que un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *conteúdo nulo* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, exite uma cobertura $X \subset I_1 \cup I_2 \cdots I_k$, por meio de um número *finito* de intervalos abertos, com $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \varepsilon$.
   Prove:
   (a) Se X tem conteúdo nulo, o mesmo corre com seu fecho $\overline{X}$.
   (b) Exitem conjuntos de medida nula que não têm conteúdo nulo.
   (c) Um conjunto compacto tem medida nula se , e somente se, tem conteúdo nulo.
   (d) Se uma funação limitada $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ coincide com uma função integrável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ exceto num conjunto de conteúdo nulo, prove que g é integrável e sua integral é igual à de f.
   (e) Todo conjunto de medida nula tem interior vazio.
   (f) Dadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis, seja $X = \{x \in [a, b]; f(x) \neq g(x)\}$. Se X tem medida nula então
   $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$
   (g) Dê exemplo de duas funções limitadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, tais que o conjunto $X = \{x \in [a, b]; f(x) \neq g(x)\}$ tenha medida nula, f seja integrável e g não seja.

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se f é contínua no ponto $c \in [a, b]$ e $f(c) > 0$, prove que $\int_a^b f(x)\, dx > 0$.

3. *Desigualdade de Schwarz.* Prove que se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas então
   $$\left[\int_a^b f(x)\, dx\right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2\, dx \cdot \int_a^b g(x)^2\, dx$$
   [*Sugestão*: exercício 7, seção 2, capítulo 2, do livro Análise Real (vol 1)]

4. Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com derivada contínua, prove o Teorema do Valor Médio (para derivadas) como conseqüência da fórmula de mesmo nome para integrais.

5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável, com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se $\{x \in [a, b]; f'(x) = 0\}$ tem conteúdo nulo, prove que f é crescente.

6. Verifique a convergência ou divergência das integrais
   $$\int_0^1 \frac{dx}{1 - cosx}, \quad \int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{1 - e^x}.$$