Lista 4 – Análise na Reta – Verão de 2009

Para ser entregue dia 19/02/09.
Professor: Luiz Henrique de Figueiredo
Monitor: Tertuliano Franco

1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f diferenciável em (a,b) com a propriedade do valor médio (ou seja, a imagem de um intervalo é sempre um intervalo). Prove que f é contínua em $[a,b]$.

2. Seja $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalo, f satisfazendo

$$|f(y) - f(x)| \leq (y-x)^2, \ \forall x, y \in I.$$

Prove que f é uma função constante.

3. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f diferenciável em $[a,b]$, $f(a) = 0$ e $A \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ em $[a,b]$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ no intervalo I. Suponha que exista $K > 0$ tal que $|f^{(n)}| \leq K$, $\forall x \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que para quaisquer $x, y \in I$ vale

$$f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n.$$

5. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ função contínua convexa tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Prove que existe um único $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

6. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ e $\epsilon > 0$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x, y \in [a,b]$, $0 < |y-x| < \delta$, implica

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} - f'(x) \right| < \epsilon.$$