Lista 3 – Análise na Reta – Verão de 2009

Para ser entregue dia 30/01/09.
Professor: Luiz Henrique de Figueiredo
Monitor: Dalia Bonilla

1. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Prove que:
   (a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê exemplo em que $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$.
   (b) $int(X \cap Y) = int(X) \cap int(Y)$ e $int(X \cup Y) \supset int(X) \cup int(Y)$. Dê exemplo em que $int(X \cup Y) \neq int(X) \cup int(Y)$.
   (c) Se $\overline{X} \cap \overline{Y} = \phi$, então $\partial(X \cup Y) = \partial X \cup \partial Y$. [O conjunto ∂X denota a *fronteira* de X]

2. Seja $E \subset \mathbb{R}$ enumerável. Consiga uma seqüência cujo conjunto dos valores de aderência é $\overline{E}$. Use este fato para mostrar que todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$ é o cunjunto dos valores de aderência de alguma seqüência. [*Sugestão:* Usar o seguinte teorema e sua prova: Todo conjunto X de números reais contém um subcojunto enumerável E, denso em X].

3. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se *locamente limitada* quando para cada $x \in X$ existe um intervalo aberto I_x, contendo x, talque $f|I_x \cap X$ é limitada. Mostre que se X é compacto, toda função $f : X \to \mathbb{R}$ localmente limitada é limitada.

4. Prove que a soma da série cujos termos são os comprimentos dos intervalos omitidos para formar o conjunto de Cantor é igual a 1.