

Lista 2 - Análise na Reta - Verão de 2009

Para ser entregue dia 23/01/2009

Professor: Luiz Henrique de Figueiredo

Monitor: Adriana Neumann de Oliveira

1. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o $\sup f$ como o supremo do conjunto $f(X)$, analogamente define-se $\inf f$ como o ínfimo conjunto $f(X)$. Prove que

$$\sup(-f) = -\inf f.$$

2. Se uma sequência monótona tem uma subsequência convergente, prove que a sequência é ela própria convergente.
3. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Se $a \leq x_n \leq n^k$ para todo n , então $\lim \sqrt[k]{x_n} = 1$
4. Analise as afirmações abaixo e diga se são verdadeiras ou falsas. Prove as que forem verdadeiras e para as falsas dê um contra-exemplo.
 - a) Se $\lim x_n y_n = 0$, então $\lim x_n = 0$ ou $\lim y_n = 0$.
 - b) Se $\lim x_n = 0$ e $\{y_n\}$ é uma sequência qualquer, então $\lim x_n y_n = 0$.
5. Se $0 < a < b < 1$, a série $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \dots$ é convergente. Mostre que o teste de Cauchy conduz a este resultado mas o teste de d'Alembert é inconclusivo.