Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Prova de Análise Numérica – 2015

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. **(a)** Prove que o método de Newton para resolver a equação $\cos(x) = 0$ converge *cubicamente* qualquer que seja o ponto inicial tomado perto de um solução.

(b) Estime um intervalo contendo $\frac{\pi}{2}$ tal que o método de Newton converge para $\frac{\pi}{2}$ qualquer que seja o ponto inicial tomado nesse intervalo.

2. Considere o trecho de programa abaixo:

```
while (a+d) > a do
        d = d/2
end
print(d)
```

Se o resultado é δ para $a = 1$, quais são os resultados para $a = 2, 3, \ldots, 10$?

3. Considere $f(x) = \cosh(x)$ no intervalo $I = [-1, 1]$, onde $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
Seja p_n o polinômio que interpola f nos pontos $x_0, \ldots, x_n \in I$.

(a) Calcule uma cota superior para o erro $\|f - p_n\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x) - p_n(x)|$ que dependa somente de n e não da escolha do pontos de interpolação.

(b) Prove que $p_n \to f$ uniformemente.

(c) Calcule uma quota superior para o erro relativo em I:

$$\left| \frac{f(x) - p_n(x)}{f(x)} \right|$$

4. Obtenha uma fórmula de integração numérica do tipo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx \;\approx\; Af(-\pi) + Bf(0) + Cf(\pi)$$

que seja exata para polinômios de grau até 2 inclusive.