# Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
# Listas – Análise Numérica – 2015

*Para cada questão, entregue um* curto *relatório escrito até a data determinada.*
*Cite explicitamente todas as fontes consultadas.*

1. (para 26/3)

   Estude o Método de Newton para $f(x) = \frac{1}{x} - a$.

   (a) Faça uma análise de convergência local.
   Prove que o método converge quando o ponto inicial está perto de $\frac{1}{a}$.
   Encontre explicitamente uma vizinhança de $\frac{1}{a}$ na qual o método converge quadraticamente.

   (b) Faça uma análise de convergência global.
   Para quais pontos iniciais o método converge? Qual o limite?
   O que acontece com pontos iniciais fora da vizinhança de convergência quadrática?

   (c) Complemente a sua análise com experimentos computacionais.
   Confirme as previsões téoricas feitas acima.
   As estimativas teóricas são pessimistas demais?
   Planeje os experimentos para exibir claramente cada aspecto que você achar importante.

2. (para 9/4)

   Use os métodos que estudamos para solução de equações em uma variável para amostrar pontos na curva dada implicitamente pela equação $f(x,y) = 0$ onde

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = {} & 0.004 + 0.110x - 0.177y - 0.174x^2 + 0.224xy - 0.303y^2 \\
& -0.168x^3 + 0.327x^2y - 0.087xy^2 - 0.013y^3 + 0.235x^4 \\
& -0.667x^3y + 0.745x^2y^2 - 0.029xy^3 + 0.072y^4
\end{aligned}
$$

   Aqui está a mesma equação pronta para copiar:

```
0.004 +0.110*x -0.177*y -0.174*x^2 +0.224*x*y -0.303*y^2
-0.168*x^3 +0.327*x^2*y -0.087*x*y^2 -0.013*y^3 +0.235*x^4
-0.667*x^3*y +0.745*x^2*y^2 -0.029*x*y^3 +0.072*y^4
```

   Uma boa região para amostrar é o retângulo $[-3,3] \times [-3,3]$.

   Discuta como você usou os métodos que vimos.

   Teste outras curvas interessantes.

   Um esqueleto de um programa PostScript que desenha pontos está em `http://lhf.impa.br/cursos/an/etc/implicit.eps.txt` .

3. (para 30/4)

   Calcule uma curva paramétrica polinomial fechada interpolando subconjuntos dos pontos no arquivo `http://lhf.impa.br/cursos/an/etc/points.txt` . Analise os resultados.

   Os pontos estão ordenados como eles ocorrem na curva. Defina o tempo de cada ponto para poder calcular a interpolação. Como a escolha dos tempos afeta o resultado?

4. (para 19/5)

   (a) Repita o exercício anterior usando a spline cúbica natural.

   (b) Encontre uma formulação para a spline cúbica natural *fechada* e repita o item anterior usando essa spline fechada.

   (c) Analise a ordem de convergência da spline cúbica natural que interpola $f(x) = \sin(x)$ em $[0, 2\pi]$, usando $n$ subintervalos. Faça o mesmo para $f(x) = x^2$ em $[0, 1]$ e $f(x) = \sqrt{x}$ em $[0, 4]$.

5. (para 9/7)

   As curvas de nível de uma função $f$ são dadas implicitamente pela equação $f(x, y) = c$, onde $c$ varia. Como as curvas de nível de $f$ são ortogonais ao campo gradiente $\nabla f$, as curvas de nível são soluções de uma equação diferencial ordinária.

   (a) Use métodos numéricos para integração de equações diferenciais ordinárias para calcular pontos sobre curvas de nível de $f$ para $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f(x, y) = y^2 - x^3 - x$, e para a função da questão 2. Use os métodos de Euler, Runge–Kutta de 2ª ordem, e Runge–Kutta de 4ª ordem. Use gráficos do valor de $f$ nos pontos calculados com cada método para comparar o desempenho dos métodos. Em particular, verifique a previsão teórica de que métodos de ordem maior podem usar passos maiores para obter aproximadamente o mesmo desempenho.

   (b) Repita o item anterior usando um corretor para trazer de volta à curva cada ponto calculado com o método de integração.