

Prova de Análise Numérica

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Ache um intervalo contendo uma raiz de $x^3 = x + 1$ que possa ser usado no método da biseção. Usando esse intervalo, após quantas interações desse método podemos garantir que temos uma estimativa da raiz com erro menor que 10^{-6} ? (Lembre que $2^{10} = 1024$.)
2. Mostre que o Método de Newton para a equação $x^3 = 2$ converge para qualquer ponto inicial x_0 . Dê um intervalo no qual a convergência é quadrática. (Caso precise, use $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$.)
3. Ache um polinômio que interpole os dados abaixo. Qual o valor desse polinômio em $x = 5$?

x	1	2	3	4
y	1958	1962	1970	1994

4. Seja $f(x) = \log(x + 1)$ no intervalo $I = [0, 1]$, onde $\log =$ logaritmo natural. Seja p_n o polinômio que interpola f nos pontos $x_0, \dots, x_n \in I$. Calcule uma cota superior para o erro $\|f - p_n\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x) - p_n(x)|$ que dependa somente de n e não da escolha dos pontos de interpolação. Conclua que $p_n \rightarrow f$ uniformemente. Qual o grau de p_n para o qual $\|f - p_n\|_\infty \leq 10^{-6}$?
5. Obtenha uma fórmula de integração numérica do tipo

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

que seja exata para polinômios de grau até 3 inclusive, usando $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$.