# Análise Numérica 2002, Lista 2
# para 26/10/2002

1. Exercício 51, Página 173

2. Exercício 41, Página 209

3. Exercício 45, Página 211

4. Seja $K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$
   Prove que $K_2(A) = 1 \iff A$ é um múltiplo de uma matriz ortogonal

5. Para resolver o sistema $Ax = b$, $A$ não singular, considere o método $x^{k+1} = B^{-1}Cx^k + B^{-1}b$ onde $B$ é não singular e $A = B - C$
   Prove que se $\|A^{-1}\|\|C\| < \frac{1}{2}$ então $\{x^k\}$ converge a $x = A^{-1}b$

6. Exercício 33, Página 246
   Prove que se $x^{k+1} = (I - Q^{-1}A)x^k + Q^{-1}b$ e $\delta = \|I - Q^{-1}A\| < 1$ então $\|x^k - x\| \leq \frac{\delta}{1-\delta}\|x^k - x^{k-1}\|$

7. Seja $A$ simétrica e não singular, $B$ não singular, $A = B - C$, $B + C$ positiva definida e $\rho(B^{-1}C) < 1$. Provar que se $x_{k+1} = B^{-1}Cx_k$ então:

   a) $x_k^t A x_k - x_{k+1}^t A x_{k+1} = (x_k - x_{k+1})^t (B + C)(x_k - x_{k+1})$

   b) $A$ é definida positiva.

   Definição: $\rho(A)$ maior outovalor de $A$

8. Seja $q$ um polinômio de grau $\leq n-1$ então
$$\sum_{i=1}^{n} q(x_i) \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)^{-1} = 0$$

9. Seja
$f[x_0] = f(x_0),\ f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$
$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0},\ f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1,x_2,...,x_n]-f[x_0,x_1,...,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$

Provar que se $p$ é o polinômio de interpolação de Lagrange da função $f$ nos pontos $x_0, x_1, ..., x_n$ então

a) $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$

b) $f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)^{-1}.$