Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Prova 1 de Álgebra Linear e Aplicações – 2010

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Considere o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 6 & 2 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Para quais valores de α e β o sistema não tem solução?

(b) Para quais valores de α e β o sistema tem alguma solução?

(c) Para quais valores de α e β o sistema tem uma única solução? Calcule a solução nesses casos.

(d) Para quais valores de α e β o sistema tem uma infinidade de soluções? Calcule a solução geral nesses casos.

2. Considere a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule as dimensões dos quatro subespaços associados a A: $\operatorname{im} A$, $\ker A$, $\operatorname{lin} A$, $\ker A^\top$.

(b) Encontre uma base ortogonal para $\operatorname{im} A$.

3. Seja A uma matriz $m \times n$.

(a) Prove que $\ker A^\top A = \ker A$.

(b) Prove que $\operatorname{posto} A^\top A = \operatorname{posto} A$.

(c) Prove que $A^\top A$ é inversível se $m \geq n$ e o posto de A é máximo.

4. Seja A uma matriz $m \times n$. Prove que A tem posto 1 se e somente se existem vetores não nulos $u \in \mathbf{R}^{m\times 1}$ e $v \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ tais que $A = uv^\top$.

(ponto extra) Interprete a decomposição em valores singulares como uma decomposição em soma de matrizes de posto 1.