Prova 3 – Análise Complexa – 2007

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas. D é o disco unitário aberto centrado na origem: $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.

1. Prove que o anel $A = \{z \in \mathbf{C} : 1 < |z| < 2\}$ não é simplesmente conexo.

2. Considere o semiplano superior aberto $H = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

(a) Prove que H é simplesmente conexo.

(b) Descreva explicitamente todos os automorfismos conformes de H.

3. (a) Prove que a única função holomorfa $D \to D$ que tem pelo menos dois pontos fixos é a identidade.

(b) Sejam $f, g : \Omega \to \Omega$ holomorfas, Ω um aberto simplesmente conexo de $\mathbf{C}$. Prove que se f e g coincidem em dois pontos então $f = g$.

4. Sejam $f\colon D \to D$ holomorfa, $a \in D$ e $b = f(a)$. Prove que

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}.$$

É possível ter $f(1/2) = 3/4$ e $f'(1/2) = 2/3$?