Prova 2 – Análise Complexa – 2007

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Prove que todos os zeros de $f(z) = z^4 + 6z + 3$ estão no disco $|z| < 2$ e que três deles estão no anel $1 < |z| < 2$.

2. Qual o maior disco aberto centrado na origem no qual a função $f(z) = z^3 + 12z + 5$ é injetiva?

3. Determine e classifique as singularidades de

$$f(z) = \frac{z}{\exp(z) - 1}$$

4. Se C é o círculo de raio R centrado na origem, calcule a integral abaixo em função de R:

$$\int_C \frac{z}{\exp(z) - 1}\, dz$$

5. Seja Ω um aberto estrelado e f uma função holomorfa em Ω. Prove que se f não se anula em Ω, então f tem um logaritmo holomorfo, isto é, existe $g\colon \Omega \to \mathbf{C}$ holomorfa tal que $\exp(g(z)) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.