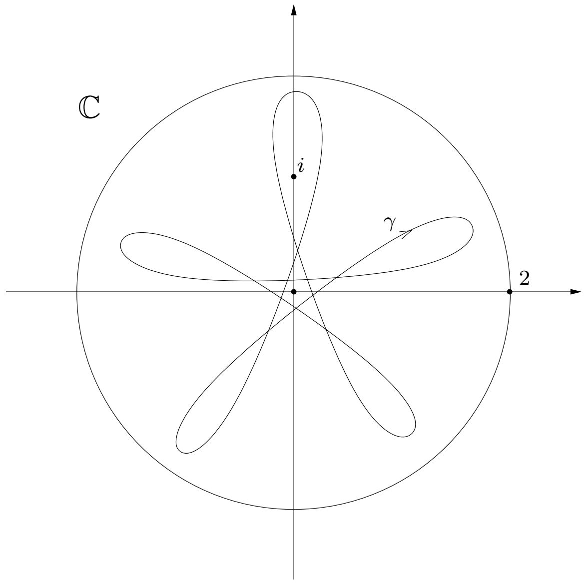
IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
5^a Lista de Exercícios de Análise Complexa
Professor: Luiz Henrique de Figueiredo

Aluno:

1. Seja γ um caminho contido em $\mathbb{D}(0,2)$, conforme a figura abaixo.



Calcule:

a) $Ind_\gamma(0)$

b) $Ind_\gamma(i)$

c) $Ind_\gamma(1+2i)$

2. Seja γ o caminho suave fechado em $\mathbb{C}$ definido por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} -1+e^{-it} & , \quad -2\pi \leq t \leq 0 \\ 1-e^{-it} & , \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases};$$

Calcule $Ind_\gamma(z)$ para todo $z \in \{\mathbb{C} - \gamma\}$.

3. Observe as funções:

-Translação: $t_\alpha : z \mapsto z+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$

-Rotação: $r_\theta : z \mapsto e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$

-Homotetia: $h_s : z \mapsto sz$, $s \in \mathbb{R}$

-Inversão: $\sigma : z \mapsto \dfrac{1}{z}$

Mostre que qualquer transformação de Moëbius é uma composição finita de algumas das funções acima.

4. (Opcional) Seja f uma função holomorfa em $\mathbb{D}(0,1)$ tal que o fecho da imagem de $\mathbb{D}(0,1)$ por f é um subconjunto de $\mathbb{D}(0,1)$, ou seja $\overline{f(\mathbb{D}(0,1))} \subset \mathbb{D}(0,1)$. Mostre que f tem um único ponto fixo em $\mathbb{D}(0,1)$, ou seja, existe um único $\alpha \in \mathbb{D}(0,1)$ tal que $f(\alpha) = \alpha$.

5. (Opcional) Denotemos por $\sqrt{\cdot}$ o ramo principal da raiz quadrada, isto é, a inversa da bijeção analítica $z \mapsto z^2$ de $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ em $\{\mathbb{C} - \mathbb{R}_-\}$. Seja $f : z \mapsto \dfrac{1}{2}\sqrt{1+z}$, $z \in \mathbb{D}(0,1)$.

   a) Verifique a definição de $\sqrt{\cdot}$.

   b) Mostre que a derivada de f não é limitada em $\mathbb{D}(0,1)$.

   c) Mostre que f tem um ponto fixo em $\mathbb{D}(0,1)$.

6. Discuta a transformação linear fracionária $\varphi : z \mapsto \dfrac{z+1}{z-1}$, z na esfera de Riemann. A seguir, determine a imagem dos conjuntos $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $(-1,1)$, $\partial\mathbb{D}(0,1)$ e $\mathbb{D}(0,1)$.

7. Para exercícios complementares veja: Rudin, Walter. Real and Complex Analysis. Exercícios do capítudo 14. (Sujestões: 6, 8, 30 (opcional) e 31 (opcional))