IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
3^a Lista de Exercícios de Análise Complexa
Professor: Luiz Henrique de Figueiredo

Aluno:

1. Dados $r \in \mathbb{R}_+^*$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Seja a circunferência $\gamma_{(z_0,r)} = \{z \in \mathbb{C} \ , \ |z - z_0| = r\}$. Mostre que:

   a) se $|z_0| \neq r$ então o conjunto $\widetilde{\gamma} = \left\{ \frac{1}{z} \ , \ z \in \gamma_{(z_0,r)} \right\}$ também é uma circunferência. Qual seu centro e seu raio?

   b) se $|z_0| = r$ então o conjunto $\widetilde{\gamma} = \left\{ \frac{1}{z} \ , \ z \in \gamma_{(z_0,r)} \text{ e } z \neq 0 \right\}$ é uma reta. Dê uma parametrização para essa reta e calcule a distância dessa reta à origem?

   c) se $l \subset \mathbb{C}$ é uma reta então $\widetilde{l} = \overline{\left\{ \frac{1}{z} \ , \ z \in l \text{ e } z \neq 0 \right\}}$ é uma circurferência? Justifique.

2. Sejam $\{a_n\}$ uma sequência limitada de números reais positivos e $\{z_n\}$ uma sequência de números complexos distintos dois-a-dois, tais que $|z_{n+1} - z_n| \leq \frac{a_n}{n^2}$, $\forall n$. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira. Mostre que se $f(z_i) = f(z_j)$ $\forall i, j \in \mathbb{N}$, então f é constante.

3. Usando a fórmula da integral de Cauchy, caucule:

   a) $\displaystyle\int_{\partial \mathbb{D}_2(0)} \frac{e^z dz}{(z+1)(z-3)^2}$

   b) $\displaystyle\int_{\partial \mathbb{D}_2(0)} \frac{\text{sen}(z) dz}{z+i}$

   c) $\displaystyle\int_{\partial \mathbb{D}_2(-2i)} \frac{dz}{(z^2+1)}$

   d) $\displaystyle\int_{\partial \mathbb{D}_1(0)} \frac{e^z dz}{(z-2)^3}$

   Onde $\mathbb{D}_\alpha(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \ , \ |z - z_0| \leq \alpha\}$, e $\partial \mathbb{D}_\alpha(z_0)$ está orientado positivamente.