IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
2^a Lista de Exercícios de Análise Complexa
Professor: Luiz Henrique de Figueiredo

Aluno:

1. Qual o subconjunto de $\mathbb{C}$ onde as seguintes funções são complexo-diferenciáveis, isto é, têm derivada complexa?

   a) $f(x+iy) = y^2\text{sen}(x) + iy$

   b) $f(x+iy) = -6(\cos(x) + i\text{sen}(x)) + (2-2i)y^3 + 15(y^2+2y)$

2. Seja a função $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $u(x+iy) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$, encontre a função $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seja holomorfa.

3. Repita o exercício 2 para a função $u(x+iy) = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^{-y}\text{sen}(x) - \mathrm{e}^{y}\cos(x)$.

4. Mostre que, no ramo do logaritmo onde $\log(1) = 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, $s \in \mathbb{C}$, converge absolutamente se, e somente se, $\Re(s) > 1$.

5. Determine uma região maximal do plano complexo, que contenha $0 \in \mathbb{C}$, onde a função $\cos(z)$ seja injetiva. Faça o mesmo para as funções $\text{sen}(z)$ e $\tan(z)$.

   (Lembrete: $\cos(z) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz})$, $\text{sen}(z) = \dfrac{1}{2i}(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz})$, $\tan(z) = \dfrac{\text{sen}(z)}{\cos(z)}$)