IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
1^a Lista de Exercícios de Análise Complexa
Professor: Luiz Henrique de Figueiredo

Aluno:

1. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^3 = 2 + 11i$ e $\beta^3 = 2 - 11i$. Quantos são os possíveis valores para $\alpha + \beta$? Mostre que um desses valores é 4.

2. Sejam $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$. Mostre:

   a) $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|$ (Desigualdade Triangular Generalizada)

   b) $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2\right)$ (Desigualdade de Cauchy-Schwartz)

3. Seja $p(z)$ um polinômio de grau $n \geq 1$. Dado $a \in \mathbb{C}$, prove que existe um polinômio $q(z)$ de grau $n - 1$, tal que $p(z) = (z - a)q(z) + p(a)$. Deduza daí, que um polinômio de grau $n \geq 1$ tem no máximo n raízes.

4. Seja $k \in \mathbb{R}$. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + nz)^k}$ com $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ converge absolutamente se $k > 1$ e diverge se $k \leq 1$.

5. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ nos casos abaixo:

   a) $f(z) = a + bz + c\bar{z} + dz^2 + e|z|^2 + f\bar{z}^2$

   b) $f(x, y) = a + bx + cy + exy + fy^2$, $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$