

# Dos operadores de Calderón-Zygmund à teoria de wavelets

Emanuel Carneiro

IMPA - Rio de Janeiro

Agosto, 2017

# Parte I - Prelúdio

# Yves Meyer - Abel Prize 2017



The Norwegian Academy of Science and Letters  
Anunciado em 21/03 - Outorgado em 23/05/17  
Prêmio: 715,000 USD

# Um intelectual nômade

- Born in Paris (1939); grew up in Tunis on the North African coast; placed first in the entrance examination for the École Normale Supérieure in 1957; obtained his Ph.D. in 1966, under the supervision of Jean-Pierre Kahane.

## Um intelectual nômade

- Born in Paris (1939); grew up in Tunis on the North African coast; placed first in the entrance examination for the École Normale Supérieure in 1957; obtained his Ph.D. in 1966, under the supervision of Jean-Pierre Kahane.
- He was teacher at the Prytanée national militaire (1960-1963), a teaching assistant at the Université de Strasbourg (1963-1966), a Professor at Université Paris-Sud (1966-1980), a Professor at École Polytechnique (1980-1986), a Professor at Université Paris-Dauphine (1985-1995), a Senior Researcher at the Centre national de la recherche scientifique (CNRS) (1995-1999), an Invited Professor at the Conservatoire National des Arts et Métiers (2000), a Professor at École Normale Supérieure de Cachan (1999-2003), and has been a Professor Emeritus at École Normale Supérieure de Cachan since 2004 (later named Paris - Saclay).

# Sobre ensinar (na escola militar)

Meyer diz:

“A good teacher needs to be much more methodical and organized than I was. I was uncomfortable with being the one who was ‘always right’. To do research is to be ignorant most of the time and often to make mistakes.”

## ● Prêmios:

- ▶ Salem Prize, 1970;
- ▶ Gauss Prize, 2010;
- ▶ Palestrante no ICM 1970 em Nice, ICM 1983 em Varsóvia e no ICM 1990 em Kyoto.
- ▶ Membro da Academia Francesa de Ciências, 1993.
- ▶ Abel Prize, 2017.

## ● Contribuições:

- ▶ Análise Harmônica;
- ▶ Teoria dos Números;
- ▶ Equações Diferenciais Parciais;
- ▶ Análise Aplicada.

# Sobre a pesquisa em matemática

Meyer diz:

“You must dig deeply into your own self in order to do something as difficult as research in mathematics. You need to believe that you possess a treasure hidden in the depths of your mind, a treasure which has to be unveiled.”





Share Edit Author Profile



## Meyer, Yves F.

MR Author ID: **124075**  
Earliest Indexed Publication: **1966**  
Total Publications: **205**  
Total Related Publications: **23**  
Total Citations: **4928**

Published as: Meyer, Y. (65)

Publications

Related Publications

Reviews

Refine Search

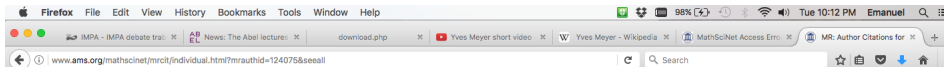
Co-Authors

Collaboration Distance

Mathematics Genealogy Project

### Co-authors (by number of collaborations)

Arnol'd, Vladimir Igorevich Auslander, Louis Azéma, Jacques  
Bonami, Aline Bourdaud, Gérard Brezis, Haim R. Cannone,  
Marco Cartier, Pierre Coates, John H. **Coifman,**  
**Ronald R.** Colin de Verdière, Yves Constantin, Peter  
Daubechies, Ingrid Chantal David, Guy René Dellacherie, Claude



## Author Citations for Yves F. Meyer

**Yves F. Meyer is cited 4928 times by 3322 authors**  
in the MR Citation Database

Most Cited Publications	
Citations	Publication
513	<b>MR1228209 (94f:42001)</b> Meyer, Yves Wavelets and operators. Translated from the 1990 French original by D. H. Salinger. <i>Cambridge Studies in Advanced Mathematics</i> , 37. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. xvi+224 pp. ISBN: 0-521-42000-8; 0-521-45869-2 <b>42-02 (42C15 46E30 47G99)</b>
398	<b>MR0518170 (81b:47061)</b> Coifman, Ronald R.; Meyer, Yves Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. (French) [Beyond pseudodifferential operators] With an English summary. <i>Astérisque</i> , 57. Société Mathématique de France, Paris, 1978. i+185 pp. (Reviewer: S. G. Gindikin) <b>47G05 (35S05 42B20 58G15)</b>
344	<b>MR1225511 (95d:46033)</b> Coifman, R.; Lions, P.-L.; Meyer, Y.; Semmes, S. Compensated compactness and Hardy spaces. <i>J. Math. Pures Appl.</i> (9) 72 (1993), no. 3, 247–286. <b>46E99 (35S05 42B30 46F10 46N20 47G30)</b>
267	<b>MR0672839 (84m:42027)</b> Coifman, R. R.; McIntosh, A.; Meyer, Y. L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur $L^2$ pour les courbes lipschitziennes. (French) [The Cauchy integral defines a bounded operator on $L^2$ for Lipschitz curves] <i>Ann. of Math.</i> (2) 116 (1982), no. 2, 361–387. <b>42B20 (30E25)</b>
221	<b>MR1083580</b> Meyer, Yves Ondelettes, filtres miroirs en quadrature et traitement numérique de l'image. (French) [Wavelets, quadrature mirror filters and numerical image processing] <i>Les ondelettes en 1989 (Orsay, 1989)</i> , 14–25, 196–197, Lecture Notes in Math., 1438, Springer, Berlin, 1990. <b>42C15</b>
218	<b>MR1456993 (98e:42001)</b> Meyer, Yves; Coifman, Ronald Wavelets. Calderón-Zygmund and multilinear operators. Translated from the 1990 and 1991 French originals by David Salinger. <i>Cambridge Studies in Advanced Mathematics</i> , 48. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. xx+315 pp. ISBN: 0-521-42001-6; 0-521-79473-0 <b>42-02 (31B10 42B20 42C15)</b>
204	<b>MR0836025 (87e:81089)</b> Daubechies, Ingrid; Grossmann, A.; Meyer, Y. Painless nonorthogonal expansions. <i>J. Math. Phys.</i> 27 (1986), no. 5, 1271–1283. (Reviewer: Robin Hudson) <b>81D30 (46C10)</b>
	<b>MR1852741 (2002j:43001)</b> Meyer, Yves Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution

www.ams.org/mathscinet/search/series.html?id=1596



## Parte II - O começo da história

# O começo da história



Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830).

# Um dos 72



# Análise de Fourier

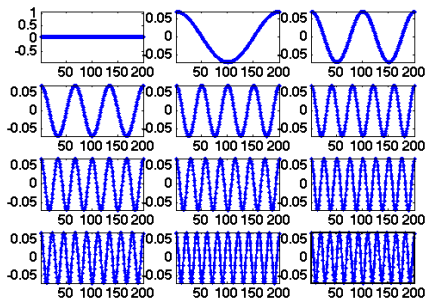
- Estudar as manifestações de fenômenos oscilatórios na natureza.

# Análise de Fourier

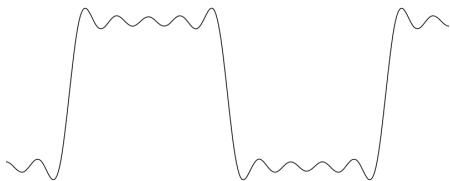
- Estudar as manifestações de fenômenos oscilatórios na natureza.
- Ideia original de Fourier: representação de funções como superposição de funções mais simples (senos e cossenos), i.e. para  $f$  uma função 1-periódica:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)$$

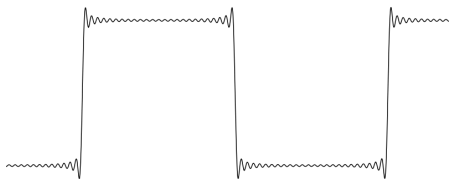
Fourier Basis for the Periodic Boundary Condition



# O fenômeno de Gibbs - 1899



5 coefs.

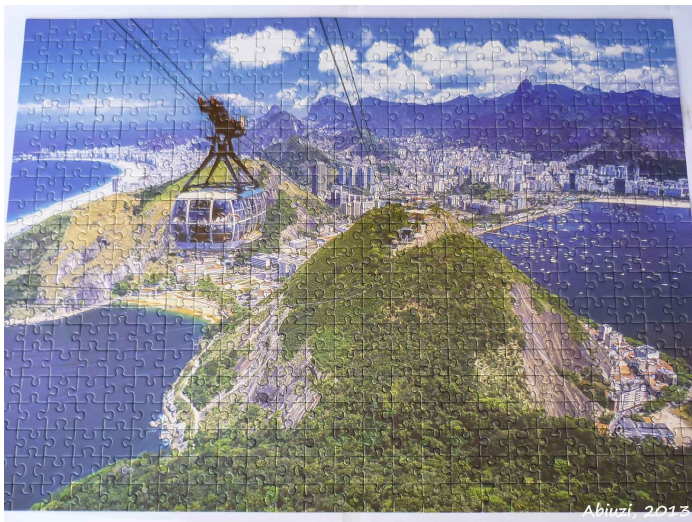


25 coefs.

Erro de 0.0894...  $\sim$  9% nas descontinuidades.



# Recompondo a função



*Sparse?*

## Parte III - A revolução das wavelets

# Wavelets

- Confecção de novas bases de funções. Derivadas de uma função de escala  $\Phi$  e uma função 'wavelet'  $\Psi$ , por operações de translação e dilatação.

# Wavelets

- Confecção de novas bases de funções. Derivadas de uma função de escala  $\Phi$  e uma função 'wavelet'  $\Psi$ , por operações de translação e dilatação.
- Haar (1909) em sua tese.

# Wavelets

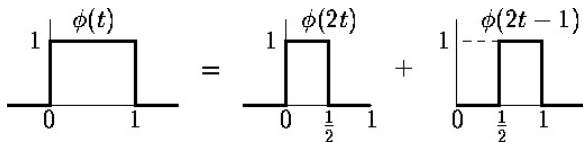
- Confecção de novas bases de funções. Derivadas de uma função de escala  $\Phi$  e uma função 'wavelet'  $\Psi$ , por operações de translação e dilatação.
- Haar (1909) em sua tese.
- Weiss, Coifman, Morlet. 1960 - 1980.

# Wavelets

- Confecção de novas bases de funções. Derivadas de uma função de escala  $\Phi$  e uma função 'wavelet'  $\Psi$ , por operações de translação e dilatação.
- Haar (1909) em sua tese.
- Weiss, Coifman, Morlet. 1960 - 1980.
- Mallat, Meyer, Daubechies - 1984 - ... Formulam a 'Multiresolution Analysis'. (Meyer: wavelets contínuos e diferenciáveis; Daubechies: + suporte compacto).

# Entendendo a ideia - a construção de Haar

- Função de Escala  $\Phi$ :



# Entendendo a ideia - a construção de Haar

- Função de Escala  $\Phi$ :

The diagram shows the equation  $\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1)$  using three plots. The first plot shows  $\phi(t)$  as a rectangular pulse from  $t=0$  to  $t=1$  with height 1. The second plot shows  $\phi(2t)$  as a rectangular pulse from  $t=0$  to  $t=1/2$  with height 1. The third plot shows  $\phi(2t-1)$  as a rectangular pulse from  $t=1/2$  to  $t=1$  with height 1. The plots are connected by an equals sign and a plus sign.

- $V_0 = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(x - k)\}$ , com número finito de termos.



# Entendendo a ideia - a construção de Haar

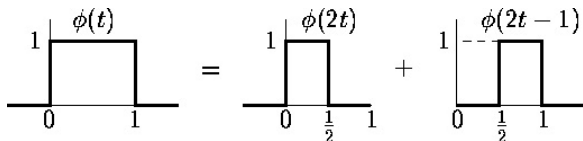
- Função de Escala  $\Phi$ :

$$\begin{array}{c} \phi(t) \\ 1 \\ \hline 0 \quad 1 \end{array} = \begin{array}{c} \phi(2t) \\ 1 \\ \hline 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} \phi(2t-1) \\ 1 \\ \hline 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \end{array}$$

- $V_0 = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(x - k)\}$ , com número finito de termos.
- $V_1 = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(2x - k)\} \dots$

# Entendendo a ideia - a construção de Haar

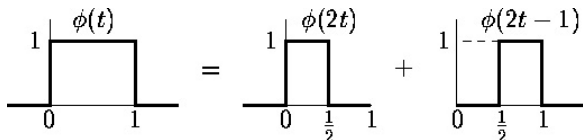
- Função de Escala  $\Phi$ :



- $V_0 = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(x - k)\}$ , com número finito de termos.
- $V_1 = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(2x - k)\}$ ...
- ...
- $V_j = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(2^j x - k)\}$ ....

# Entendendo a ideia - a construção de Haar

- Função de Escala  $\Phi$ :



- $V_0 = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(x - k)\}$ , com número finito de termos.
- $V_1 = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(2x - k)\}$ ...
- ...
- $V_j = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(2^j x - k)\}$ ....
- Note that  $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$

# Entendendo a ideia - a construção de Haar

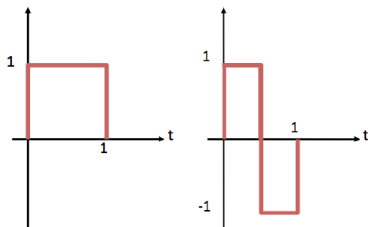
- Função de Escala  $\Phi$ :

$$\begin{array}{c} \phi(t) \\ \hline 1 \\ \hline 0 \quad 1 \end{array} = \begin{array}{c} \phi(2t) \\ \hline 1 \\ \hline 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} \phi(2t-1) \\ \hline 1 \\ \hline 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \end{array}$$

- $V_0 = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(x - k)\}$ , com número finito de termos.
- $V_1 = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(2x - k)\}$ ...
- ...
- $V_j = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Phi(2^j x - k)\}$ ....
- Note that  $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$
- Quem é o complemento ortogonal de  $V_0$  em  $V_1$ ?

# A wavelet de Haar

- A função wavelet  $\Psi$ :



- $W_0 = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Psi(x - k)\}$ . Então

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$

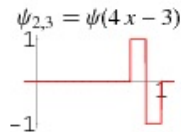
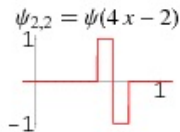
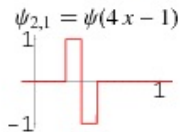
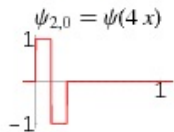
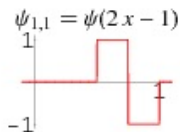
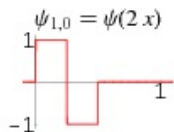
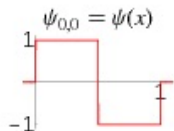
- $W_1 = \{f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Psi(2x - k)\}$ . Então

$$V_2 = V_1 \oplus W_1 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1.$$

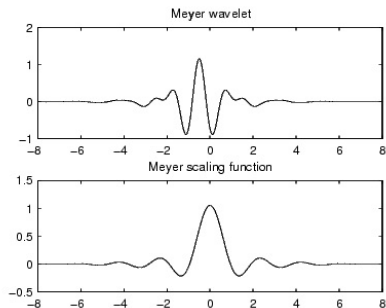
- Em geral:

$$V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_{j-1}.$$

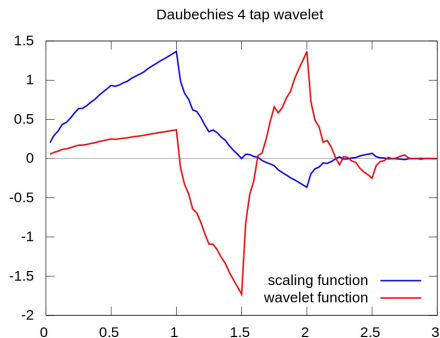
# A wavelet de Haar (cont.)



# Wavelets de Meyer e Daubechies



Meyer



Daubechies

# Aplicações

- Applied and computational harmonic analysis;
- Data compression;
- Medical Imaging;
- Archiving;
- Fingerprint recognition;
- Spectral analysis of paintings;
- Digital Cinema;
- Deconvolution of the Hubble space telescope images;
- The recent LIGO detection of gravitational waves created by the collision of two black holes.
- and so on...



## Parte IV - Voltando às origens de Meyer

# Teoria dos números e *quasicrystals*

- No começo dos anos 70, Meyer escreveu dois livros na interface de análise e teoria dos números:
  - ▶ *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique.* (French) 1970. 63 pp.
  - ▶ *Algebraic numbers and harmonic analysis.* 1972. 274pp.

# Teoria dos números e *quasicrystals*

- No começo dos anos 70, Meyer escreveu dois livros na interface de análise e teoria dos números:
  - ▶ *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique.* (French) 1970. 63 pp.
  - ▶ *Algebraic numbers and harmonic analysis.* 1972. 274pp.
- Anos depois, partes de sua ideias (*model sets*) nestes livros foram redescobertas no que hoje chamam-se *quasicrystals*.

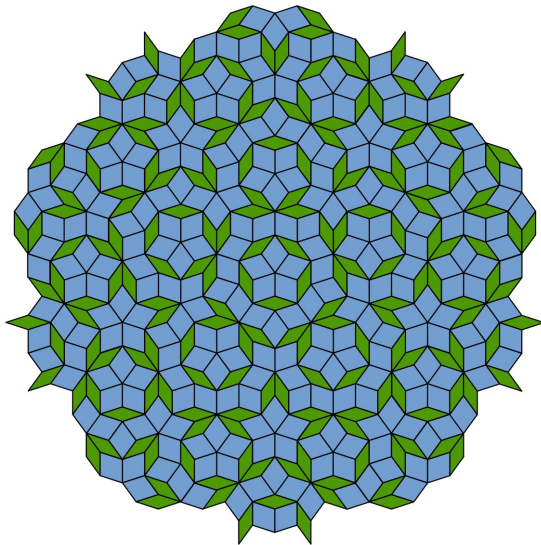
# Teoria dos números e *quasicrystals*

- No começo dos anos 70, Meyer escreveu dois livros na interface de análise e teoria dos números:
  - ▶ *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique.* (French) 1970. 63 pp.
  - ▶ *Algebraic numbers and harmonic analysis.* 1972. 274pp.
- Anos depois, partes de sua ideias (*model sets*) nestes livros foram redescobertas no que hoje chamam-se *quasicrystals*.
  - ▶ Penrose tilings 1974 (vértices formam um *model set*).

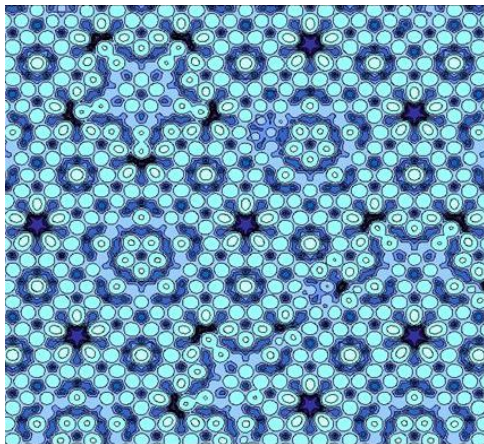
# Teoria dos números e *quasicrystals*

- No começo dos anos 70, Meyer escreveu dois livros na interface de análise e teoria dos números:
  - ▶ *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique.* (French) 1970. 63 pp.
  - ▶ *Algebraic numbers and harmonic analysis.* 1972. 274pp.
- Anos depois, partes de sua ideias (*model sets*) nestes livros foram redescobertas no que hoje chamam-se *quasicrystals*.
  - ▶ Penrose tilings 1974 (vértices formam um *model set*).
  - ▶ Dan Shechtman - Prêmio Nobel prize em Química, 2011 (pela descoberta dos *quasicrystals* na natureza). Em 1981, encontrou uma liga de alumínio-paládio-manganês com certas simetrias pentagonais.

# Penrose tiling



# Quasicrystal



Atomic model of AL-Pd-Mn quasicrystal surface

# Números de Pisot

- Um inteiro algébrico real  $\theta > 1$  é um *número de Pisot* se todos os seus conjugados de Galois têm módulo menor que 1.



# Números de Pisot

- Um inteiro algébrico real  $\theta > 1$  é um *número de Pisot* se todos os seus conjugados de Galois têm módulo menor que 1.
- Descoberto por Thue (1912) e redescoberto por Hardy (1919). Tese de Pisot em 1938.

# Números de Pisot

- Um inteiro algébrico real  $\theta > 1$  é um *número de Pisot* se todos os seus conjugados de Galois têm módulo menor que 1.
- Descoberto por Thue (1912) e redescoberto por Hardy (1919). Tese de Pisot em 1938.
- Exemplo:  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\dots$

# Números de Pisot

- Um inteiro algébrico real  $\theta > 1$  é um *número de Pisot* se todos os seus conjugados de Galois têm módulo menor que 1.
- Descoberto por Thue (1912) e redescoberto por Hardy (1919). Tese de Pisot em 1938.
- Exemplo:  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\dots$
- O conjunto  $S$  dos números de Pisot é fechado (Salem, 1940).

# Números de Pisot

- Um inteiro algébrico real  $\theta > 1$  é um *número de Pisot* se todos os seus conjugados de Galois têm módulo menor que 1.
- Descoberto por Thue (1912) e redescoberto por Hardy (1919). Tese de Pisot em 1938.
- Exemplo:  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618 \dots$
- O conjunto  $S$  dos números de Pisot é fechado (Salem, 1940).
- O menor é  $\theta_0 = 1.3247 \dots$ , raiz de  $x^3 - x - 1 = 0$  (Siegel, 1944).

# Números de Pisot

- Um inteiro algébrico real  $\theta > 1$  é um *número de Pisot* se todos os seus conjugados de Galois têm módulo menor que 1.
- Descoberto por Thue (1912) e redescoberto por Hardy (1919). Tese de Pisot em 1938.
- Exemplo:  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618 \dots$
- O conjunto  $S$  dos números de Pisot é fechado (Salem, 1940).
- O menor é  $\theta_0 = 1.3247 \dots$ , raiz de  $x^3 - x - 1 = 0$  (Siegel, 1944).
- O menor ponto de acumulação de  $S$  é  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618 \dots$

# Números de Pisot

- Um inteiro algébrico real  $\theta > 1$  é um *número de Pisot* se todos os seus conjugados de Galois têm módulo menor que 1.
- Descoberto por Thue (1912) e redescoberto por Hardy (1919). Tese de Pisot em 1938.
- Exemplo:  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618 \dots$
- O conjunto  $S$  dos números de Pisot é fechado (Salem, 1940).
- O menor é  $\theta_0 = 1.3247 \dots$ , raiz de  $x^3 - x - 1 = 0$  (Siegel, 1944).
- O menor ponto de acumulação de  $S$  é  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618 \dots$
- As potências de um número de Pisot se aproximam exponencialmente de um inteiro. Pisot demonstrou que se  $\alpha > 1$  e  $\lambda \neq 0$  são tais que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\lambda \alpha^k\|^2 < \infty$$

então  $\alpha$  é um número de Pisot e  $\lambda \in \mathbb{Q}(\alpha)$ .

# Números de Pisot

- Um inteiro algébrico real  $\theta > 1$  é um *número de Pisot* se todos os seus conjugados de Galois têm módulo menor que 1.
- Descoberto por Thue (1912) e redescoberto por Hardy (1919). Tese de Pisot em 1938.
- Exemplo:  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618 \dots$
- O conjunto  $S$  dos números de Pisot é fechado (Salem, 1940).
- O menor é  $\theta_0 = 1.3247 \dots$ , raiz de  $x^3 - x - 1 = 0$  (Siegel, 1944).
- O menor ponto de acumulação de  $S$  é  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618 \dots$
- As potências de um número de Pisot se aproximam exponencialmente de um inteiro. Pisot demonstrou que se  $\alpha > 1$  e  $\lambda \neq 0$  são tais que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\lambda \alpha^k\|^2 < \infty$$

então  $\alpha$  é um número de Pisot e  $\lambda \in \mathbb{Q}(\alpha)$ .

- Não se sabe com a hipótese apenas de  $\|\lambda \alpha^k\| \rightarrow 0$  para algum  $\lambda$ .

# Números de Salem

- Um inteiro algébrico real  $\theta > 1$  é um *número de Salem* se os seus conjugados de Galois  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$  verificam  $|\theta_j| \leq 1$  para  $2 \leq j \leq n$ , com pelo menos uma igualdade.



# Números de Salem

- Um inteiro algébrico real  $\theta > 1$  é um *número de Salem* se os seus conjugados de Galois  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$  verificam  $|\theta_j| \leq 1$  para  $2 \leq j \leq n$ , com pelo menos uma igualdade.
- Segue que o polinômio minimal deve ser recíproco ( $P(x) = x^n P(1/x)$ ) e portanto  $n$  é par,  $\theta_2 = 1/\theta$  e  $|\theta_3| = |\theta_4| = \dots = |\theta_n| = 1$ .

# Números de Salem

- Um inteiro algébrico real  $\theta > 1$  é um *número de Salem* se os seus conjugados de Galois  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$  verificam  $|\theta_j| \leq 1$  para  $2 \leq j \leq n$ , com pelo menos uma igualdade.
- Segue que o polinômio minimal deve ser recíproco ( $P(x) = x^n P(1/x)$ ) e portanto  $n$  é par,  $\theta_2 = 1/\theta$  e  $|\theta_3| = |\theta_4| = \dots = |\theta_n| = 1$ .
- Menor número de Salem conhecido: raiz de

$$P(x) = x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$$

que é  $\theta = 1.17628\dots$  (polinômio de Lehmer).

# Quasicrystals

## Definition

Um conjunto  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  é dito ser um conjunto de Delaunay se existem dois raios  $R_2 > R_1 > 0$  tais que qualquer bola de raio  $R_1$  em  $\mathbb{R}^n$  contém no máximo um ponto de  $\Lambda$  e qualquer bola de raio  $R_2$  em  $\mathbb{R}^n$  contém pelo menos um ponto de  $\Lambda$ .

# Quasicrystals

## Definition

Um conjunto  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  é dito ser um conjunto de Delaunay se existem dois raios  $R_2 > R_1 > 0$  tais que qualquer bola de raio  $R_1$  em  $\mathbb{R}^n$  contém no máximo um ponto de  $\Lambda$  e qualquer bola de raio  $R_2$  em  $\mathbb{R}^n$  contém pelo menos um ponto de  $\Lambda$ .

## Definition

Um *quasicrystal*  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto de Delaunay tal que

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F,$$

onde  $F$  é um conjunto finito.

# Um teorema de Meyer

## Theorem

*Seja  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  um quasicrystal e seja  $\theta > 1$  um número real tal que  $\theta\Lambda \subset \Lambda$ , então  $\theta$  é um número de Pisot ou de Salem.*

*Reciprocamente, se  $\theta > 1$  é um número de Pisot ou de Salem, para cada dimensão  $n$  existe um quasicrystal  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\theta\Lambda \subset \Lambda$ .*

# Parte V - Integrais singulares

# Um exemplo de integral singular

Transformada de Hilbert

- A função  $1/y$  não é absolutamente integrável perto da origem (ou no infinito).

# Um exemplo de integral singular

## Transformada de Hilbert

- A função  $1/y$  não é absolutamente integrável perto da origem (ou no infinito).
- Como definir então:

$$T(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y} dy$$



# Um exemplo de integral singular

## Transformada de Hilbert

- A função  $1/y$  não é absolutamente integrável perto da origem (ou no infinito).
- Como definir então:

$$T(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

- Devemos usar o cancelamento desta função

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \frac{1}{y} dy = 0.$$

# Um exemplo de integral singular

## Transformada de Hilbert

- A função  $1/y$  não é absolutamente integrável perto da origem (ou no infinito).
- Como definir então:

$$T(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

- Devemos usar o cancelamento desta função

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \frac{1}{y} dy = 0.$$

- Daí definimos então:

$$T(f)(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \frac{f(x-y) - f(x)}{y} dy$$

# A teoria de Calderón-Zygmund

- A teoria de Calderón-Zygmund estuda exatamente estes operadores com núcleos singulares em  $\mathbb{R}^n$ .

$$Tf(x) = f * g(x)$$

onde  $|g(x)| \sim 1/|x|^n$ , mas  $g$  tem oscilação.

# A teoria de Calderón-Zygmund

- A teoria de Calderón-Zygmund estuda exatamente estes operadores com núcleos singulares em  $\mathbb{R}^n$ .

$$Tf(x) = f * g(x)$$

onde  $|g(x)| \sim 1/|x|^n$ , mas  $g$  tem oscilação.

- A teoria clássica prova que  $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $1 < p < \infty$ .

# A teoria de Calderón-Zygmund

- A teoria de Calderón-Zygmund estuda exatamente estes operadores com núcleos singulares em  $\mathbb{R}^n$ .

$$Tf(x) = f * g(x)$$

onde  $|g(x)| \sim 1/|x|^n$ , mas  $g$  tem oscilação.

- A teoria clássica prova que  $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  para  $1 < p < \infty$ .
- Nos anos 70 e 80 Meyer deu importantes contribuições a esta teoria.

# Algumas contribuições de Meyer

- No clássico trabalho de C. Fefferman de 1971 ('The multiplier problem for the ball'), ele prova que o operador definido por

$$\widehat{Tf} = \chi_{B_1} \widehat{f}$$

é limitado em  $L^2$  mas não em  $L^p$  para qualquer  $p \neq 2$ . Um dos lemas cruciais na prova é de Y. Meyer.

## Algumas contribuições de Meyer (cont.)

- Em 1982 (com Coifman and McIntosh) Meyer solves a conjecture of Calderón: seja  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Lipschitz com constante  $M \geq 0$ . Defina

$$C_\varphi(x, y) = \frac{1 + i\varphi'(y)}{x - y + i(\varphi(x) - \varphi(y))}$$

for  $x \neq y$ . Defina o operador singular

$$Tf(x) = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} C_\varphi(x, y) f(y) dy.$$

Então  $Tf(x)$  está bem definido q.t.p. e vale

$$\|Tf\|_2 \leq C(1 + M)^9 \|f\|_2$$

O resultado havia sido provado por Calderón para  $M$  suficientemente pequeno.

# Yves Meyer - Abel Prize 2017

