

Probabilidade
IMPA – 2002
4ª Lista de Exercícios
Entregar em 13/5.

1. a) Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes, todas com distribuição exponencial de parâmetro λ . Mostre que $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ tem distribuição Gama com parâmetros n e λ (isto é, a densidade de Z é dada por

$$f(z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\lambda z}, \quad z > 0.)$$

- b) Seja Z uma variável aleatória com distribuição gama com parâmetros n (inteiro positivo) e λ . Mostre que

$$P(Z > t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

- c) (Processo de Poisson) Conclua que se os tempos de ocorrência em um processo de chegadas são dados por $T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $n = 1, 2, \dots$, onde X_1, X_2, \dots, X_n são i.i.d. exponenciais com parâmetro λ , então o número de chegadas em $[0, t]$ tem distribuição de Poisson com parâmetro λt .

2. a) BJ, página 94, problema 36.
b) Use os resultados obtidos para resolver o problema 40, da página 95.
3. a) BJ, página 94, problema 37.
b) Suponha que você precise, para uma simulação, gerar valores de uma variável aleatória com distribuição exponencial com parâmetro 1 e que seu ambiente computacional fornece uma função que gera números uniformemente distribuídos entre 0 e 1 (no Excel, por exemplo, a função RAND() faz isto). Explique como usar o resultado do item (a) para gerar os valores aleatórios desejados e, se possível, gere uma amostra de 10 valores aleatórios.
4. BJ, página 97, problema 48.
5. BJ, página 97, problema 53.
6. BJ, página 99, problema 60.