

Probabilidade
IMPA – 2002
2ª Lista de Exercícios
Entregar em 15/4

1. Dois números x e y são escolhidos, independentemente e ao acaso, no intervalo $[0, 1]$. Seja X o **maior** dos dois números observados. Encontre a função de distribuição acumulada de X e esboce seu gráfico.
2. BJ, página 88, exercício 9. Primeiro, mostre que a função f dada é, de fato, uma função de densidade de probabilidade.
3. Seja F uma função de distribuição de probabilidade com pontos de salto $\{a_j\}$.
Seja F_d a parte discreta de F , definida por
$$F_d(x) = \sum_{a_j \leq x} [F(a_j) - F(a_j^-)].$$
 - a) Mostre que F_d é contínua à direita e que $F_d(x) - F_d(x^-) = F(x) - F(x^-)$, para todo x .
 - b) Conclua que a diferença $F_c = F - F_d$ é contínua.
4. (Chung, p. 10, exercício 6) Dizemos que um ponto x pertence ao **suporte** de uma função de distribuição F quando, para todo $\varepsilon > 0$, temos $F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$.
Mostre que todo ponto de descontinuidade de F pertence ao suporte, e que cada ponto isolado de suporte é um ponto de descontinuidade. Dê um exemplo de uma função de distribuição discreta cujo suporte seja a reta.
5. (Chung, p. 14, exercício 9) Todo x pertencente ao conjunto de Cantor tem uma expansão na base 3 sem o dígito 1:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad a_n = 0 \text{ ou } 2.$$

Prove que, para tal x , tem-se $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$, onde F é a função de distribuição

de Cantor. Qual é a expressão de $F(x)$ para pontos no complementar do conjunto de Cantor?