

## Probabilidade e Processos Estocásticos

IMPA – 2013

7ª Lista de Exercícios

Entregar em 23/5.

1. Um número  $X$  é escolhido de acordo com uma distribuição uniforme em  $[a, b]$ . Sem conhecer o número escolhido, você deve escolher um segundo número  $c$  e pagar uma quantia igual a  $(X-c)^2$ . Como você deve escolher  $c$  para minimizar o valor esperado desta quantia? Generalize para o caso em que  $X$  é uma variável integrável qualquer. [Sugestão: escreva  $(X-c)^2 = ((X-EX) + (EX-c))^2$  e mostre que  $E(X-c)^2 = E(X-EX)^2 + (EX-c)^2$ .]
2. BJ, página 143, problema 23. [Sugestão: Use o problema anterior para mostrar que  $Var(X) \leq E\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2$ ; a seguir, use o fato de que  $X \in [a, b]$  para estabelecer uma cota superior para este valor esperado. ]
3. Dois pontos são escolhidos independentemente no intervalo  $[0, 1]$ , cada um de acordo com uma distribuição uniforme. Calcule o valor esperado:
  - a) do quadrado da distância entre eles.
  - b) da distância entre eles.
4. BJ, página 145, problema 28.
5. BJ, página 145, problema 34.
6. Seja  $X$  o número de bolas brancas obtidas quando são retiradas  $n$  bolas de uma urna contendo  $r$  bolas brancas e  $N - r$  bolas pretas (ou seja,  $X$  tem distribuição hipergeométrica com parâmetros  $n, r$  e  $N$ ). Calcule  $EX$  e  $Var X$ . [Sugestão: escreva  $X = X_1 + \dots + X_n$ , onde as  $X_i$  são variáveis aleatórias de Bernoulli; elas não são independentes, mas os valores de  $cov(X_i, X_j)$ , para  $i \neq j$ , são todos iguais].

Sugestões de outros problemas: 22, 26, 28, 29, 31, 33, 35 das páginas 142-145 de BJ.