Probabilidade e Processos Estocásticos
IMPA – 2013
4ª Lista de Exercícios
Entregar em 18/4.

1. As especificações para a produção de grandes lotes (digamos, com cerca de 100.000 unidades) de um certo item são de que um lote deve conter menos de 6% de itens defeituosos. O procedimento de inspeção consiste em escolher, ao acaso, 100 itens do lote e recusar o lote se 3 ou mais itens defeituosos são encontrados.
   a) A distribuição do número N de itens defeituosos entre os 100 retirados é binomial? Pode ser aproximada por uma distribuição binomial? Por que?
   b) Usando o modelo binomial, calcule uma cota superior para a probabilidade de que um lote ruim seja erradamente aceito (observe que a probabilidade de aceitação indevida é máxima quando o percentual de itens defeituosos é exatamente igual a 6%).
   c) Quando np é pequeno, uma distribuição binomial com parâmetros n e p pode ser aproximada por uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = np$ (por que?). Refaça o cálculo do item b) utilizando esta aproximação.

2. BJ, página 91, problema 16.

3. A chegada de clientes a uma revendedora de automóveis é modelada como um Processo de Poisson de taxa igual a 3 clientes por hora.
   a) Qual é a probabilidade de que cheguem 3 clientes entre 9 e 10 horas e 3 clientes entre 9:30 e 10:30?
   b) Dado que entre 9 e 10 horas chegaram 3 clientes, qual é a probabilidade de que não tenha chegado nenhum cliente entre 9 e 9:30?
   c) Dado que chegou apenas um cliente entre 9 e 10 horas, qual é a probabilidade de que ele tenha chegado entre 9 e 9:30?

4. Suponha que o tempo de vida de um equipamento é uma variável aleatória contínua e não-negativa X. Definimos a *taxa de falha* deste equipamento como
   $h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{P(X \leq t + \Delta t \mid X > t)}{\Delta t}$, para cada $t \geq 0$ para o qual este limite existe.

a) Interprete, intuitivamente, o significado desta definição.
b) Mostre que $h(t) = \dfrac{f(t)}{1 - F(t)}$, onde f e F são, respectivamente, a densidade e a função de distribuição acumulada de X.
c) Se a vida de um equipamento tem distribuição exponencial de taxa λ, qual é a sua taxa de falha $h(t)$?
d) Mostre que, se a taxa de falha de um equipamento é $h(t)$, então a função de distribuição acumulada de sua vida é dada por

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x h(t)dt}.$$

[Sugestão: integre os dois lados da equação em b) no intervalo [0, x], observando que $\dfrac{f(t)}{1 - F(t)} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(1 - F(t))$.]

e) Obtenha a densidade de uma distribuição cuja taxa de falha é da forma $h(t) = at$, para $t \geq 0$.

5. Seja $X = e^{\mu+\sigma Z}$, onde Z tem distribuição normal padrão (dizemos que X tem distribuição *lognormal* com parâmetros μ e σ^2) . Encontre a função de densidade de probabilidade de X (não se esqueça de indicar para que valores de x a densidade $f_X(x)$ é não nula).

6. a) BJ, página 94, problema 37.
   b) Suponha que você precise, para uma simulação, gerar valores de uma variável aleatória com distribuição exponencial com parâmetro λ e que seu ambiente computacional fornece uma função que gera números uniformemente distribuídos entre 0 e 1 (no Excel, por exemplo, a função RAND() ou ALEATORIO() faz isto). Explique como usar o resultado do item (a) para gerar os valores aleatórios desejados.