

**IMPA – 2013**  
**Probabilidade e Processos Estocásticos**  
**1ª Lista de Exercícios**  
**Entregar em 28/3.**

1. Qual é a probabilidade de que o número total de caras em 3 lançamentos de uma moeda honesta seja ímpar? Em 4 lançamentos? Em 5 lançamentos? A resposta em cada caso é  $\frac{1}{2}$ . Mostre que a probabilidade de um número ímpar de caras em qualquer número de lançamentos é  $\frac{1}{2}$  (Sugestão: indução).
2. Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Dois jogadores retiram, alternadamente, uma bola da urna. O primeiro a retirar a bola de número 7 é o vencedor. Determine a probabilidade de que o primeiro a jogar seja o vencedor:
  - a) quando as bolas retiradas não são repostas na urna;
  - b) quando elas são repostas.(Sugestão: O primeiro jogador vence quando a (primeira) bola 7 sai na 1ª ou na 3ª ou na 5ª, etc, extração).
3. Escolhem-se, ao acaso, duas peças de um dominó comum. Qual é a probabilidade de elas possuírem um número comum?
4. BJ, exercício 9, p. 28.
5. Sejam  $A$  e  $B$  eventos aleatórios do mesmo espaço de probabilidade. Mostre que  $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$ . Utilize esta desigualdade para resolver o problema 5, da página 28, de BJ.
6. Sejam  $A_1, A_2, \dots$  eventos em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Considere o evento  $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ .
  - a) Dentre as frases a seguir, diga qual é a que caracteriza os pontos amostrais  $\omega$  em  $X$ 
    - I) Para algum índice  $n$ ,  $\omega \in A_n$ .
    - II) Para todo índice  $n$ ,  $\omega \in A_n$ .
    - III) Para todo  $n$  suficientemente grande,  $\omega \in A_n$ .
    - IV) Existe uma infinidade de índices  $n$  para os quais  $\omega \in A_n$ .Justifique.
  - b) Suponha que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ . Mostre que  $P(X) = 0$ . (Sugestão: observe que  $B_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ , para  $k = 1, 2, \dots$ , forma uma seqüência não decrescente de conjuntos).

**Sugestões de outros problemas:** 1, 2, 3, 4, 6, 7, 14 das páginas 27-30 de BJ.