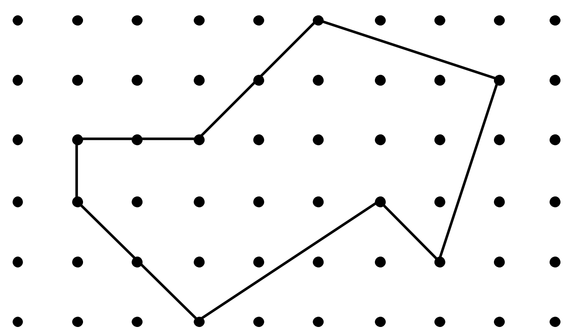
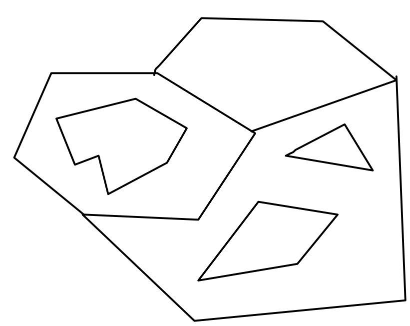
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Geometria Computacional - 2010
3ª Lista de Exercícios – Para 18/10

1. O objetivo deste problema é estabelecer a fórmula de Pick para a área de um polígono. É necessário utilizar o seguinte fato, que não precisa ser demonstrado: *um triângulo cujos vértices tem coordenadas inteiras não tem outros pontos de coordenadas inteiras em seu bordo ou interior se e somente se sua área é igual a* 1/2.
   Seja P um polígono simples em que todos os vértices tem coordenadas inteiras. Seja I o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e B o número de pontos de coordenadas inteiras no bordo do polígono (incluindo os vértices). No exemplo abaixo, $I = 14$ e $B = 11$.



a) Mostre que a área de P é dada por $I + \frac{B}{2} - 1$. [Sugestão: tome uma triangulação do interior de P na qual os vértices sejam os pontos de coordenadas inteiras em seu bordo e seu interior.]
b) A fórmula de Pick fornece um modo eficiente para se calcular a área de um polígono?

2. Generalize a relação de Euler ($V + F - A = 2$) para considerar o caso em que as regiões de uma subdivisão planar não têm necesariamente bordo conexo (isto é, podem também apresentar um total de R bordos internos; veja, ao lado, um caso em que $R = 3$.)

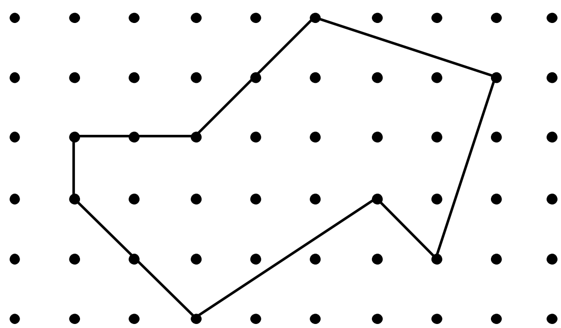


3. Seja $C = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de pontos de plano e D o grafo de Delaunay correspondente (armazenado em uma estrutura topológica). Suponhamos que um novo ponto p_{n+1} é acrescentado a C e que o novo grafo de Delaunay passa a ser D'.
a) Mostre que todas as arestas que estão em D', mas não estão em D, têm obrigatoriamente p_{n+1} como um dos seus vértices.
b) Seja a uma aresta de D. Forneça um teste de complexidade $O(1)$ que verifique se a continua sendo uma aresta de D'.

4. Seja C um conjunto finito de pontos do plano e sejam S e T subconjuntos disjuntos de C tais que $S \cup T = C$. Mostre que se pq é o menor segmento determinado por um ponto de S e um ponto de T, então pq é necessariamente uma aresta do diagrama de Delaunay de C.

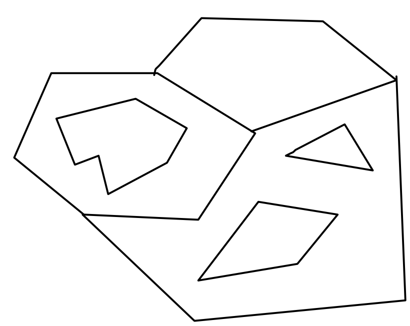
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Geometria Computacional - 2010
3ª Lista de Exercícios – Para 18/10

1. O objetivo deste problema é estabelecer a fórmula de Pick para a área de um polígono. É necessário utilizar o seguinte fato, que não precisa ser demonstrado: *um triângulo cujos vértices tem coordenadas inteiras não tem outros pontos de coordenadas inteiras em seu bordo ou interior se e somente se sua área é igual a* 1/2.
   Seja P um polígono simples em que todos os vértices tem coordenadas inteiras. Seja I o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e B o número de pontos de coordenadas inteiras no bordo do polígono (incluindo os vértices). No exemplo abaixo, $I = 14$ e $B = 11$.



a) Mostre que a área de P é dada por $I + \frac{B}{2} - 1$. [Sugestão: tome uma triangulação do interior de P na qual os vértices sejam os pontos de coordenadas inteiras em seu bordo e seu interior.]
b) A fórmula de Pick fornece um modo eficiente para se calcular a área de um polígono?

2. Generalize a relação de Euler ($V + F - A = 2$) para considerar o caso em que as regiões de uma subdivisão planar não têm necesariamente bordo conexo (isto é, podem também apresentar um total de R bordos internos; veja, ao lado, um caso em que $R = 3$.)

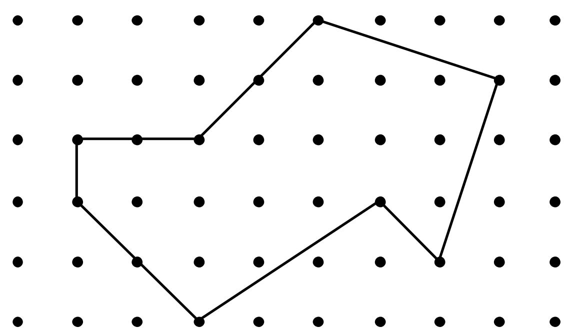


3. Seja $C = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de pontos de plano e D o grafo de Delaunay correspondente (armazenado em uma estrutura topológica). Suponhamos que um novo ponto p_{n+1} é acrescentado a C e que o novo grafo de Delaunay passa a ser D'.
a) Mostre que todas as arestas que estão em D', mas não estão em D, têm obrigatoriamente p_{n+1} como um dos seus vértices.
b) Seja a uma aresta de D. Forneça um teste de complexidade $O(1)$ que verifique se a continua sendo uma aresta de D'.

4. Seja C um conjunto finito de pontos do plano e sejam S e T subconjuntos disjuntos de C tais que $S \cup T = C$. Mostre que se pq é o menor segmento determinado por um ponto de S e um ponto de T, então pq é necessariamente uma aresta do diagrama de Delaunay de C.

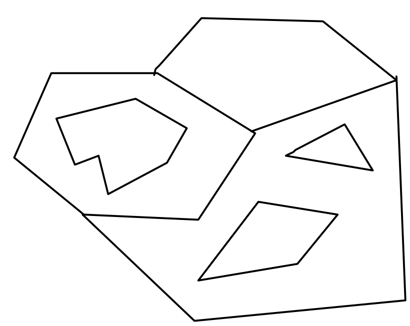
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Geometria Computacional - 2010
3ª Lista de Exercícios – Para 18/10

1. O objetivo deste problema é estabelecer a fórmula de Pick para a área de um polígono. É necessário utilizar o seguinte fato, que não precisa ser demonstrado: *um triângulo cujos vértices tem coordenadas inteiras não tem outros pontos de coordenadas inteiras em seu bordo ou interior se e somente se sua área é igual a* 1/2.
   Seja P um polígono simples em que todos os vértices tem coordenadas inteiras. Seja I o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e B o número de pontos de coordenadas inteiras no bordo do polígono (incluindo os vértices). No exemplo abaixo, $I = 14$ e $B = 11$.



a) Mostre que a área de P é dada por $I + \frac{B}{2} - 1$. [Sugestão: tome uma triangulação do interior de P na qual os vértices sejam os pontos de coordenadas inteiras em seu bordo e seu interior.]
b) A fórmula de Pick fornece um modo eficiente para se calcular a área de um polígono?

2. Generalize a relação de Euler ($V + F – A = 2$) para considerar o caso em que as regiões de uma subdivisão planar não têm necesariamente bordo conexo (isto é, podem também apresentar um total de R bordos internos; veja, ao lado, um caso em que $R = 3$.)

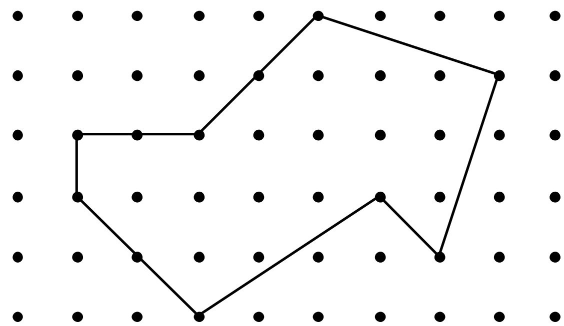


3. Seja $C = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de pontos de plano e D o grafo de Delaunay correspondente (armazenado em uma estrutura topológica). Suponhamos que um novo ponto p_{n+1} é acrescentado a C e que o novo grafo de Delaunay passa a ser D'.
a) Mostre que todas as arestas que estão em D', mas não estão em D, têm obrigatoriamente p_{n+1} como um dos seus vértices.
b) Seja a uma aresta de D. Forneça um teste de complexidade $O(1)$ que verifique se a continua sendo uma aresta de D'.

4. Seja C um conjunto finito de pontos do plano e sejam S e T subconjuntos disjuntos de C tais que $S \cup T = C$. Mostre que se pq é o menor segmento determinado por um ponto de S e um ponto de T, então pq é necessariamente uma aresta do diagrama de Delaunay de C.

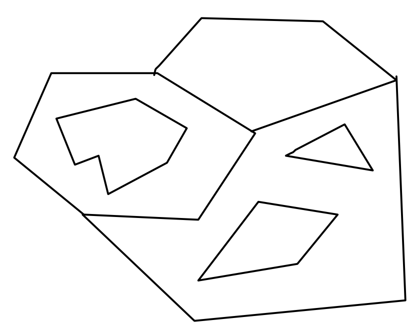
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Geometria Computacional - 2010
3ª Lista de Exercícios – Para 18/10

1. O objetivo deste problema é estabelecer a fórmula de Pick para a área de um polígono. É necessário utilizar o seguinte fato, que não precisa ser demonstrado: *um triângulo cujos vértices tem coordenadas inteiras não tem outros pontos de coordenadas inteiras em seu bordo ou interior se e somente se sua área é igual a* 1/2.
Seja P um polígono simples em que todos os vértices tem coordenadas inteiras. Seja I o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e B o número de pontos de coordenadas inteiras no bordo do polígono (incluindo os vértices). No exemplo abaixo, I = 14 e B = 11.



a) Mostre que a área de P é dada por $I + \frac{B}{2} - 1$. [Sugestão: tome uma triangulação do interior de P na qual os vértices sejam os pontos de coordenadas inteiras em seu bordo e seu interior.]
b) A fórmula de Pick fornece um modo eficiente para se calcular a área de um polígono?

2. Generalize a relação de Euler ($V + F – A = 2$) para considerar o caso em que as regiões de uma subdivisão planar não têm necesariamente bordo conexo (isto é, podem também apresentar um total de R bordos internos; veja, ao lado, um caso em que R = 3.)

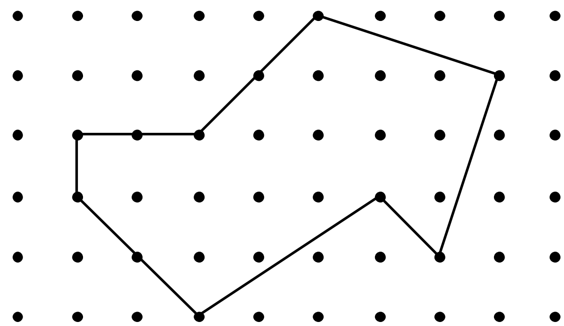


3. Seja $C = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de pontos de plano e D o grafo de Delaunay correspondente (armazenado em uma estrutura topológica). Suponhamos que um novo ponto p_{n+1} é acrescentado a C e que o novo grafo de Delaunay passa a ser D'.
a) Mostre que todas as arestas que estão em D', mas não estão em D, têm obrigatoriamente p_{n+1} como um dos seus vértices.
b) Seja a uma aresta de D. Forneça um teste de complexidade $O(1)$ que verifique se a continua sendo uma aresta de D'.

4. Seja C um conjunto finito de pontos do plano e sejam S e T subconjuntos disjuntos de C tais que $S \cup T = C$. Mostre que se pq é o menor segmento determinado por um ponto de S e um ponto de T, então pq é necessariamente uma aresta do diagrama de Delaunay de C.

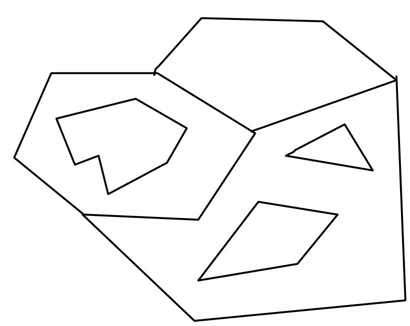
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Geometria Computacional - 2010
3ª Lista de Exercícios – Para 18/10

1. O objetivo deste problema é estabelecer a fórmula de Pick para a área de um polígono. É necessário utilizar o seguinte fato, que não precisa ser demonstrado: *um triângulo cujos vértices tem coordenadas inteiras não tem outros pontos de coordenadas inteiras em seu bordo ou interior se e somente se sua área é igual a* 1/2.
   Seja P um polígono simples em que todos os vértices tem coordenadas inteiras. Seja I o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e B o número de pontos de coordenadas inteiras no bordo do polígono (incluindo os vértices). No exemplo abaixo, I = 14 e B = 11.



a) Mostre que a área de P é dada por $I + \frac{B}{2} - 1$. [Sugestão: tome uma triangulação do interior de P na qual os vértices sejam os pontos de coordenadas inteiras em seu bordo e seu interior.]
b) A fórmula de Pick fornece um modo eficiente para se calcular a área de um polígono?

2. Generalize a relação de Euler ($V + F - A = 2$) para considerar o caso em que as regiões de uma subdivisão planar não têm necesariamente bordo conexo (isto é, podem também apresentar um total de R bordos internos; veja, ao lado, um caso em que R = 3.)

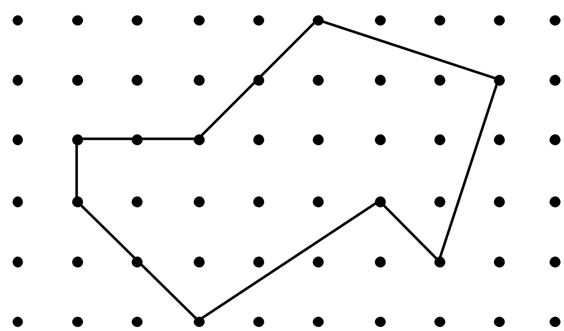


3. Seja $C = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de pontos de plano e D o grafo de Delaunay correspondente (armazenado em uma estrutura topológica). Suponhamos que um novo ponto p_{n+1} é acrescentado a C e que o novo grafo de Delaunay passa a ser D'.
a) Mostre que todas as arestas que estão em D', mas não estão em D, têm obrigatoriamente p_{n+1} como um dos seus vértices.
b) Seja a uma aresta de D. Forneça um teste de complexidade $O(1)$ que verifique se a continua sendo uma aresta de D'.

4. Seja C um conjunto finito de pontos do plano e sejam S e T subconjuntos disjuntos de C tais que $S \cup T = C$. Mostre que se pq é o menor segmento determinado por um ponto de S e um ponto de T, então pq é necessariamente uma aresta do diagrama de Delaunay de C.

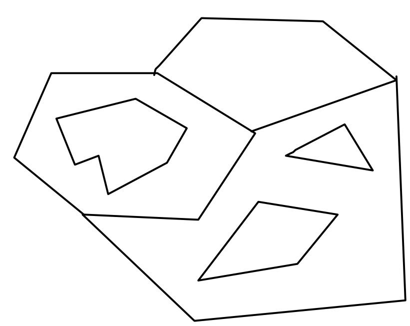
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Geometria Computacional - 2010
3ª Lista de Exercícios – Para 18/10

1. O objetivo deste problema é estabelecer a fórmula de Pick para a área de um polígono. É necessário utilizar o seguinte fato, que não precisa ser demonstrado: *um triângulo cujos vértices tem coordenadas inteiras não tem outros pontos de coordenadas inteiras em seu bordo ou interior se e somente se sua área é igual a* 1/2.
   Seja P um polígono simples em que todos os vértices tem coordenadas inteiras. Seja I o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e B o número de pontos de coordenadas inteiras no bordo do polígono (incluindo os vértices). No exemplo abaixo, $I = 14$ e $B = 11$.



a) Mostre que a área de P é dada por $I + \frac{B}{2} - 1$. [Sugestão: tome uma triangulação do interior de P na qual os vértices sejam os pontos de coordenadas inteiras em seu bordo e seu interior.]
b) A fórmula de Pick fornece um modo eficiente para se calcular a área de um polígono?

2. Generalize a relação de Euler ($V + F - A = 2$) para considerar o caso em que as regiões de uma subdivisão planar não têm necesariamente bordo conexo (isto é, podem também apresentar um total de R bordos internos; veja, ao lado, um caso em que $R = 3$.)

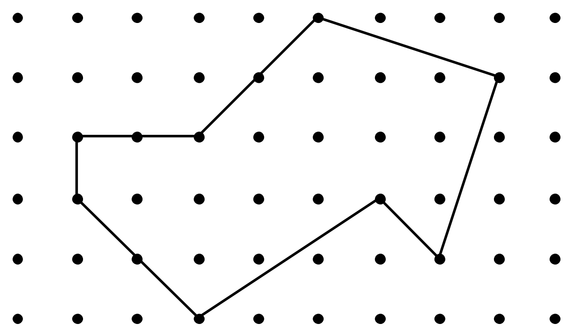


3. Seja $C = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de pontos de plano e D o grafo de Delaunay correspondente (armazenado em uma estrutura topológica). Suponhamos que um novo ponto p_{n+1} é acrescentado a C e que o novo grafo de Delaunay passa a ser D'.
a) Mostre que todas as arestas que estão em D', mas não estão em D, têm obrigatoriamente p_{n+1} como um dos seus vértices.
b) Seja a uma aresta de D. Forneça um teste de complexidade $O(1)$ que verifique se a continua sendo uma aresta de D'.

4. Seja C um conjunto finito de pontos do plano e sejam S e T subconjuntos disjuntos de C tais que $S \cup T = C$. Mostre que se pq é o menor segmento determinado por um ponto de S e um ponto de T, então pq é necessariamente uma aresta do diagrama de Delaunay de C.

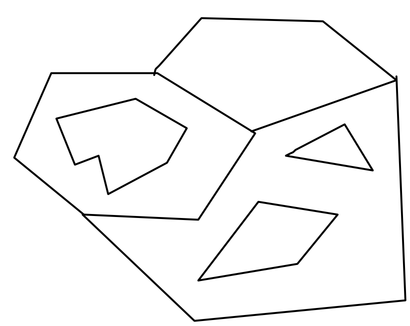
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Geometria Computacional - 2010
3ª Lista de Exercícios – Para 18/10

1. O objetivo deste problema é estabelecer a fórmula de Pick para a área de um polígono. É necessário utilizar o seguinte fato, que não precisa ser demonstrado: *um triângulo cujos vértices tem coordenadas inteiras não tem outros pontos de coordenadas inteiras em seu bordo ou interior se e somente se sua área é igual a* 1/2.
   Seja P um polígono simples em que todos os vértices tem coordenadas inteiras. Seja I o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e B o número de pontos de coordenadas inteiras no bordo do polígono (incluindo os vértices). No exemplo abaixo, $I = 14$ e $B = 11$.



a) Mostre que a área de P é dada por $I + \frac{B}{2} - 1$. [Sugestão: tome uma triangulação do interior de P na qual os vértices sejam os pontos de coordenadas inteiras em seu bordo e seu interior.]
b) A fórmula de Pick fornece um modo eficiente para se calcular a área de um polígono?

2. Generalize a relação de Euler ($V + F – A = 2$) para considerar o caso em que as regiões de uma subdivisão planar não têm necesariamente bordo conexo (isto é, podem também apresentar um total de R bordos internos; veja, ao lado, um caso em que $R = 3$.)

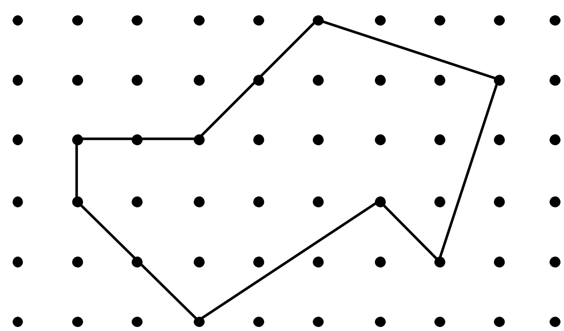


3. Seja $C = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de pontos de plano e D o grafo de Delaunay correspondente (armazenado em uma estrutura topológica). Suponhamos que um novo ponto p_{n+1} é acrescentado a C e que o novo grafo de Delaunay passa a ser D'.
a) Mostre que todas as arestas que estão em D', mas não estão em D, têm obrigatoriamente p_{n+1} como um dos seus vértices.
b) Seja a uma aresta de D. Forneça um teste de complexidade $O(1)$ que verifique se a continua sendo uma aresta de D'.

4. Seja C um conjunto finito de pontos do plano e sejam S e T subconjuntos disjuntos de C tais que $S \cup T = C$. Mostre que se pq é o menor segmento determinado por um ponto de S e um ponto de T, então pq é necessariamente uma aresta do diagrama de Delaunay de C.

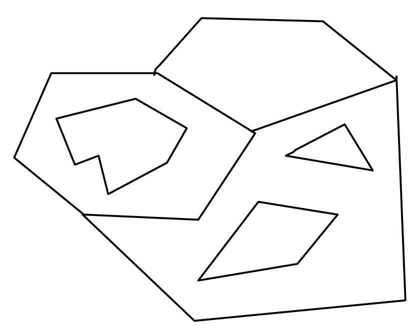
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Geometria Computacional - 2010
3ª Lista de Exercícios – Para 18/10

1. O objetivo deste problema é estabelecer a fórmula de Pick para a área de um polígono. É necessário utilizar o seguinte fato, que não precisa ser demonstrado: *um triângulo cujos vértices tem coordenadas inteiras não tem outros pontos de coordenadas inteiras em seu bordo ou interior se e somente se sua área é igual a* 1/2.
   Seja P um polígono simples em que todos os vértices tem coordenadas inteiras. Seja I o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e B o número de pontos de coordenadas inteiras no bordo do polígono (incluindo os vértices). No exemplo abaixo, $I = 14$ e $B = 11$.



a) Mostre que a área de P é dada por $I + \frac{B}{2} - 1$. [Sugestão: tome uma triangulação do interior de P na qual os vértices sejam os pontos de coordenadas inteiras em seu bordo e seu interior.]
b) A fórmula de Pick fornece um modo eficiente para se calcular a área de um polígono?

2. Generalize a relação de Euler ($V + F - A = 2$) para considerar o caso em que as regiões de uma subdivisão planar não têm necesariamente bordo conexo (isto é, podem também apresentar um total de R bordos internos; veja, ao lado, um caso em que $R = 3$.)

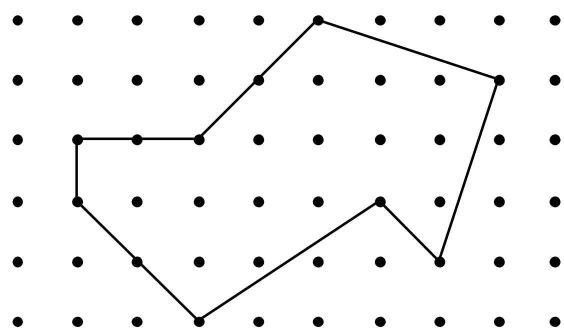


3. Seja $C = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de pontos de plano e D o grafo de Delaunay correspondente (armazenado em uma estrutura topológica). Suponhamos que um novo ponto p_{n+1} é acrescentado a C e que o novo grafo de Delaunay passa a ser D'.
a) Mostre que todas as arestas que estão em D', mas não estão em D, têm obrigatoriamente p_{n+1} como um dos seus vértices.
b) Seja a uma aresta de D. Forneça um teste de complexidade $O(1)$ que verifique se a continua sendo uma aresta de D'.

4. Seja C um conjunto finito de pontos do plano e sejam S e T subconjuntos disjuntos de C tais que $S \cup T = C$. Mostre que se pq é o menor segmento determinado por um ponto de S e um ponto de T, então pq é necessariamente uma aresta do diagrama de Delaunay de C.

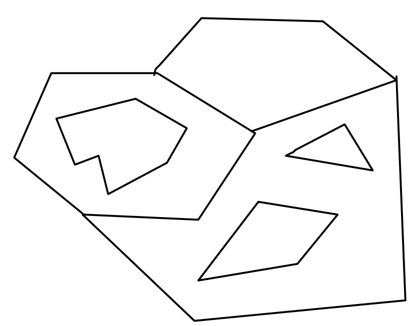
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Geometria Computacional - 2010
3ª Lista de Exercícios – Para 18/10

1. O objetivo deste problema é estabelecer a fórmula de Pick para a área de um polígono. É necessário utilizar o seguinte fato, que não precisa ser demonstrado: *um triângulo cujos vértices tem coordenadas inteiras não tem outros pontos de coordenadas inteiras em seu bordo ou interior se e somente se sua área é igual a* 1/2.
   Seja P um polígono simples em que todos os vértices tem coordenadas inteiras. Seja I o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e B o número de pontos de coordenadas inteiras no bordo do polígono (incluindo os vértices). No exemplo abaixo, I = 14 e B = 11.



a) Mostre que a área de P é dada por $I + \frac{B}{2} - 1$. [Sugestão: tome uma triangulação do interior de P na qual os vértices sejam os pontos de coordenadas inteiras em seu bordo e seu interior.]
b) A fórmula de Pick fornece um modo eficiente para se calcular a área de um polígono?

2. Generalize a relação de Euler ($V + F - A = 2$) para considerar o caso em que as regiões de uma subdivisão planar não têm necesariamente bordo conexo (isto é, podem também apresentar um total de R bordos internos; veja, ao lado, um caso em que R = 3.)

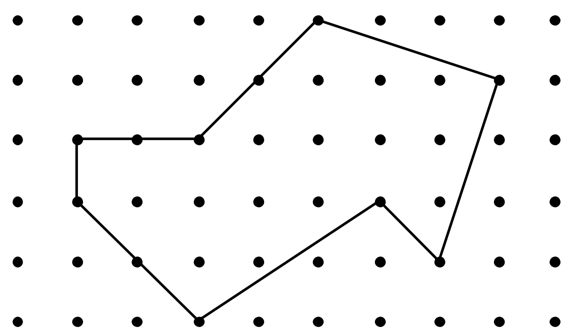


3. Seja $C = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de pontos de plano e D o grafo de Delaunay correspondente (armazenado em uma estrutura topológica). Suponhamos que um novo ponto p_{n+1} é acrescentado a C e que o novo grafo de Delaunay passa a ser D'.
a) Mostre que todas as arestas que estão em D', mas não estão em D, têm obrigatoriamente p_{n+1} como um dos seus vértices.
b) Seja a uma aresta de D. Forneça um teste de complexidade $O(1)$ que verifique se a continua sendo uma aresta de D'.

4. Seja C um conjunto finito de pontos do plano e sejam S e T subconjuntos disjuntos de C tais que $S \cup T = C$. Mostre que se pq é o menor segmento determinado por um ponto de S e um ponto de T, então pq é necessariamente uma aresta do diagrama de Delaunay de C.

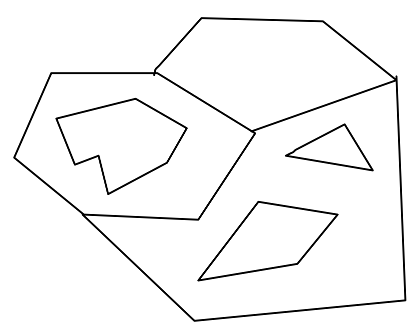
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Geometria Computacional - 2010
3ª Lista de Exercícios – Para 18/10

1. O objetivo deste problema é estabelecer a fórmula de Pick para a área de um polígono. É necessário utilizar o seguinte fato, que não precisa ser demonstrado: *um triângulo cujos vértices tem coordenadas inteiras não tem outros pontos de coordenadas inteiras em seu bordo ou interior se e somente se sua área é igual a* 1/2.
   Seja P um polígono simples em que todos os vértices tem coordenadas inteiras. Seja I o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do polígono e B o número de pontos de coordenadas inteiras no bordo do polígono (incluindo os vértices). No exemplo abaixo, I = 14 e B = 11.



a) Mostre que a área de P é dada por $I+\frac{B}{2}-1$. [Sugestão: tome uma triangulação do interior de P na qual os vértices sejam os pontos de coordenadas inteiras em seu bordo e seu interior.]
b) A fórmula de Pick fornece um modo eficiente para se calcular a área de um polígono?

2. Generalize a relação de Euler ($V + F – A = 2$) para considerar o caso em que as regiões de uma subdivisão planar não têm necesariamente bordo conexo (isto é, podem também apresentar um total de R bordos internos; veja, ao lado, um caso em que R = 3.)



3. Seja $C = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ um conjunto de pontos de plano e D o grafo de Delaunay correspondente (armazenado em uma estrutura topológica). Suponhamos que um novo ponto p_{n+1} é acrescentado a C e que o novo grafo de Delaunay passa a ser D'.
a) Mostre que todas as arestas que estão em D', mas não estão em D, têm obrigatoriamente p_{n+1} como um dos seus vértices.
b) Seja a uma aresta de D. Forneça um teste de complexidade $O(1)$ que verifique se a continua sendo uma aresta de D'.

4. Seja C um conjunto finito de pontos do plano e sejam S e T subconjuntos disjuntos de C tais que $S \cup T = C$. Mostre que se pq é o menor segmento determinado por um ponto de S e um ponto de T, então pq é necessariamente uma aresta do diagrama de Delaunay de C.