IMPA – 2007
Álgebra Linear e Aplicações
1ª Lista de Exercícios
Entregar em 9/4.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
   a) Usando eliminação gaussiana, calcule o posto de A e encontre uma base para o espaço gerado pelas colunas de A e para o espaço gerado pelas linhas de A.
   b) Encontre uma base para o núcleo de A (ou seja, para $\{x \mid Ax = 0\}$).
   c) Verifique se o sistema $Ax = b$, onde $b = [1\ 2\ 3\ 1]^T$, tem solução.

2. Seja A uma matriz $m \times n$. Dizemos que B é uma inversa à direita (esquerda) de A quando $AB = I$ ($BA = I$).
   a) Mostre que A possui esquerda à direita se e somente se o sistema $Ax = b$ possui solução para todo b em $\boldsymbol{R}^m$. (Observe que, se B é uma inversa à direita de A, então cada uma de suas colunas é solução de um sistema da forma $Ax = e_j$.). Conclua que A possui inversa à direita se e somente se posto(A) = m. Conclua ainda que A não possui inversa à direita se $m > n$.
   b) Sob que condições a inversa à direita de A existe e é única? E a inversa à esquerda?
   c) Mostre que se A possui inversa à esquerda e à direita, cada uma destas inversas é única e que elas são iguais entre si.

3. Seja A uma matriz $m \times n$. Mostre que o posto de A é igual a 1 se e somente se existem vetores não nulos $u_{m\times 1}$ e $v_{n\times 1}$ tais que $A = uv^T$.

4. Trefethen, exercício 1.1.

5. Trefethen, exercício 1.3.