Prova 1 – Álgebra Linear e Aplicações – 2005

Todas as questões têm o mesmo valor. Justifique todas as suas respostas.

1. Prove que o sistema $Ax = b$ tem solução se e somente se o posto de $[A, b]$ é igual ao posto de A, onde $[A, b]$ é a matriz A aumentada da coluna b.

2. (a) Encontre um sistema homogêneo de três equações a quatro incógnitas que tenha como solução geral

$$x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Encontre um sistema não homogêneo de três equações a quatro incógnitas que tenha como solução geral

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Considere o sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 6 & 2 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Para quais valores de α e β o sistema tem alguma solução?

(b) Para quais valores de α e β o sistema tem uma única solução? Calcule a solução nesses casos.

(c) Para quais valores de α e β o sistema tem uma infinidade de soluções? Calcule a solução geral nesses casos.

4. Considere a matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Calcule o posto de A e as dimensões dos quatro subespaços associados a A: im A, ker A, lin A, ker A^T. Encontre bases para todos esses subespaços.