

# Seleção de Pontos de Superfícies B-Splines para Manipulação Direta em Modelagem

Leandro M.V. Cruz, *aluno da Licenciatura em Matemática*, lemorc@pop.com.br

Luis A. Rivera Escriba, *orientador*, rivera@uenf.br

Luis H. Guillermo Felipe, *orientador*, guillerm@uenf.br

*Laboratório de Ciências Matemáticas -LCMAT  
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF*

## Resumo

*Este trabalho apresenta aspectos relacionados à modelagem e manipulação de superfícies B-splines cúbicas e periódicas, de forma a permitir a manipulação direta de segmentos de superfície para obter modelos interessantes de objetos. Para isso, é necessário detectar o ponto selecionado no segmento a ser deformado arrastando o ponto com o mouse. Como primeira ação, detecta-se o segmento da superfície onde a ponta do mouse está apontando. Depois, computam-se os parâmetros do ponto selecionado na superfície. Para analisar se o ponto pertence a um determinado segmento construímos uma caixa orientada envolvendo o segmento. Se o ponto está dentro da caixa, então calculamos os parâmetros do ponto sobre a superfície usando o modelo de Newton; alternativamente, para aproximar a posição do ponto, usamos a partição quaternária do espaço do domínio. Estes modelos se apresentam como ferramenta para modelagem de objetos reais, portanto complexos, e deformações locais na superfície deste objeto.*

## 1. Introdução

Especificar um objeto gráfico significa definir a geometria e a topologia do suporte geométrico, e também a sua função de atributos. É necessário realizar a representação de tal objeto para que ele possa ser manipulado no computador. A área que trata da descrição, da especificação e da representação do suporte geométrico é a *modelagem geométrica*.

Este trabalho introduz alguns conceitos básicos para a modelagem de objetos gráficos. Priorizou-se a modelagem de curvas e superfícies. Há diversos métodos de se modelar um objeto gráfico. Podemos citar como importantes métodos em modelagem geométrica a representação de um objeto em

Wireframe, ou seja, uma malha de segmentos que o represente. Um outro método é a representação CSG, que utiliza, basicamente, primitivas geométricas, transformações do espaço e operações booleanas. Além desses dois métodos citados há diversos outros apresentados em [1].

Neste trabalho utilizamos as curvas e superfícies B-Spline cúbicas e periódicas para modelar um objeto gráfico. Vale ressaltar que dada uma superfície B-Spline alguns segmentos desta superfície podem ser deformados, alterando a posição de um ponto qualquer desse segmento através do mouse. Para isso é necessário detectarmos explicitamente o ponto sobre a superfície que está sendo analisado pelo cursor do mouse, para ser manipulado. Com este propósito inserimos um modelo para a detecção do segmento selecionado, e depois usamos dois modelos para calcular os parâmetros do ponto selecionado na superfície. Trabalhos semelhantes desenvolvidos para a manipulação de curvas B-Spline podem ser encontrados em [2, 3].

## 2. Curvas e Superfícies B-Splines

As curvas Splines são uma variação das curvas de Bezier. As curvas de Bezier possuem um problema grave para ser trabalhada na modelagem geométrica, entre eles: O grau da curva depende do número de pontos de controle, portanto se o número de pontos de controle for grande o custo na geração da curva será alto; a falta de controle local da curva, a alteração em um dos pontos afeta toda a curva. Tais problemas são contornados com o uso das curvas splines. Nas curvas splines os pontos de controle possuem efeito local. Há diversos tipos de curvas e superfícies Splines, vamos nos concentrar nas B-splines cúbicas e periódicas. Um aspecto interessante em relação às curvas e às superfícies B-Spline é a

propriedade da invariância afim. Isto é: se  $T$  é uma transformação afim do espaço,  $B_0, \dots, B_n$  pontos de controle e  $P(t)$  a respectiva curva B-Spline, então  $T(P(t)) = P_T(t)$ , onde  $P_T(t)$  é a curva de B-Spline associada aos pontos  $T(B_0), \dots, T(B_n)$ . Tal propriedade, assim como algumas outras, são apresentadas em [4].

Esta é uma característica extremamente útil, visto que isto permite que haja construções geométricas com curvas B-Spline em um sistema de coordenadas mais conveniente e depois transformá-lo no sistema desejado. Essa propriedade se estende também no caso das superfícies B-Spline.

Nas curvas, o polígono que possui como vértices os pontos de controle de um segmento desta curva é denominado de *polígono de controle*. Nas superfícies os pontos de controle podem ser considerados como vértices de um *sólido convexo*.

Os objetos Gráficos B-Splines são obtidos através de uma relação entre os pontos de controle e uma Função Base. A função Base B-Spline,  $N_i^k(t)$ , também conhecida como função característica, de ordem  $k$  e grau  $k-1$ , é dada por:

$$N_i^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \leq t \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e para  $k > 1$  temos que:

$$N_i^k(t) = \frac{(t - x_i)N_i^{k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1}^{k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}$$

Os valores de  $x_i$  são conhecidos como nós. Estes nós estarão organizados em um vetor  $X$  denominado de vetor de nós. Uma propriedade relevante é que  $x_i \leq x_{i+1}$  e  $[x_i, x_{i+1})$  é um intervalo do domínio.

Quando se constrói uma curva qualquer baseada nessas funções o número de nós depende do número de pontos de controle da curva e da ordem da função base. Por isso para uma curva com  $n$  pontos de controle o vetor de nós de um intervalo aberto (desconsiderando os nós dos extremos da curva) e de uma função base de ordem  $k$ , tem  $n+k$  elementos.

$$X = [x_0, x_1, \dots, x_{n+k-1}]$$

Quando os elementos deste vetor têm como propriedade que nós consecutivos tem distância constante denomina-se a Spline como uniforme, ou periódica, caso contrário, não uniforme. Trabalharemos com as B-Splines cúbicas e periódicas, ou seja, aquelas que a ordem da função base é igual a quatro, e portanto o de grau 3, sendo

que para cada base  $N_i^4(t)$ , há quatro intervalos do domínio  $[x_i, x_{i+4})$ .

## 2.1. Curvas B-Splines Re-parametrizadas

As funções bases interpoladas linearmente, com os pontos de controle  $B_i$  definem a curva B-Spline  $f(t)$  de grau  $k-1$ . Desta forma cada função base é associada a um ponto de controle. Portanto teremos quatro pontos de controle que afetarão somente uma porção limitada da curva no intervalo do domínio  $[x_i, x_{i+4})$ .

Tendo as funções bases definidas e sabendo da necessidade de quatro pontos de controle para se gerar uma seção de uma curva B-Spline de ordem quatro podemos definir a função paramétrica que determina a curva gerada pelos  $n$  pontos de controle como:

$$f(t) = \sum_{i=0}^n B_i N_i^4(t)$$

com  $f(t)$  de grau  $k-1$  em cada intervalo do domínio  $x_i \leq t \leq x_{i+1}$ .

Em relação as B-Splines cúbicas teremos quatro pontos de controle para cada seção da curva. Cada um destes quatro pontos de controle tem sua interferência ponderada pelas funções bases. Um enfoque prático, que permite realizar o cálculo das coordenadas dos pontos da curva, é a representação matricial das bases. Chamaremos  $\tilde{N}^k(t)$  a matriz que representa as  $k$  funções bases relativa aos pontos do segmento da curva determinada pelos  $k$  pontos de controle. Tal matriz é obtida da seguinte forma:

$$\tilde{N}^k(t) = \frac{1}{(k-1)!} \begin{bmatrix} t^{k-1} & t^{k-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n^k \end{bmatrix}$$

com  $0 \leq t \leq 1$ . Os elementos de  $\begin{bmatrix} n^k \end{bmatrix}$  são inteiros obtidos pela fórmula de Cohen e Riesenfeld apresentadas em [4]. No caso dos B-splines cúbicos, ou seja, curvas em que a ordem da função é  $k = 4$ , temos que:

$$\begin{bmatrix} n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Desta forma para obter pontos de uma curva B-Spline  $f(t)$  temos que:

$$f(t) = \tilde{N}^k B^k$$

com  $0 \leq t \leq 1$  e sendo  $B^k$  o vetor dos pontos de controle.

Abaixo (Figura 1) um exemplo de uma seção de uma curva B-Spline Cúbica e periódica.

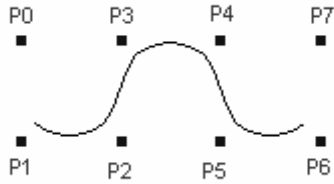


Figura 1: Segmento de curva B-splines.

## 2.2. Superfície B-Spline

Para os casos da geração de uma superfície B-Spline Periódica o processo é análogo. As funções que determinam os pontos da superfície dependem de dois parâmetros  $(r, s)$  e dependem de duas funções bases  $\tilde{N}^4(r)$  e  $\tilde{N}^4(s)$  para serem geradas. A obtenção destas bases é a mesma citada para o caso das curvas. Graças a este fato surge outra diferença importante na quantidade de pontos de controle usados para determinar um segmento de um segmento de uma Superfície B-Spline. Agora são necessários dezesseis ( $4 \times 4$ ) pontos de controles e não apenas quatro, como era para as curvas. A função que gera um segmento de uma superfície B-Spline Cúbica e Periódica é:

$$Q(r, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} N^4(r) N^4(s),$$

onde  $P_{i,j}$  é a matriz de pontos de controle.

Uma Superfície B-Spline Periódica possui as mesmas propriedades de uma curva B-Spline. Portanto a superfície está contida no sólido convexo gerado pelos pontos de controle, os pontos de controle têm interferência local, etc. As coordenadas dos pontos de uma superfície B-Spline também podem ser obtidas através de uma multiplicação matricial dada pela equação:

$$Q(r, s) = N^4(r) P (N^4(s))^T.$$

Abaixo (Figura 2) um exemplo de uma de uma superfície B-Spline Cúbica e Periódica.

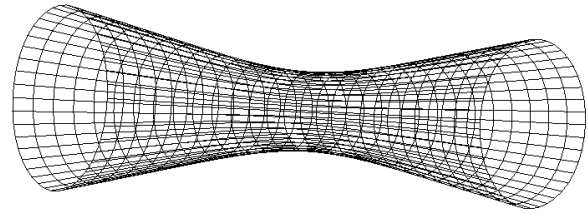


Figura 2: Superfície B-splines Cúbica e Periódica.

## 3. Determinação de um Ponto Sobre a Superfície

Uma contribuição relevante apresentada neste trabalho se refere ao fato de reconhecer se dado um ponto qualquer, este pertence ou não a superfície. Para este propósito podemos considerar também os pontos que não estejam exatamente sobre a superfície, mas muito próximos a ela, como fazendo parte desta.

Primeiramente precisamos determinar à qual sólido convexo  $P$  pertence. A partir daí podemos determinar em qual *patch*  $P$  supostamente está. Obviamente se  $P$  não pertencer a nenhum sólido convexo deste objeto ele não pertence à superfície. Um outro teste, mais sofisticado, para determinar se  $P$  pertence ou não a superfície é verificar se ele está contido na Caixa Orientada Envolvente do Patch. Esta caixa é o paralelepípedo de menor volume que contém tal patch. Portanto é fácil de verificar se um ponto está contido no paralelepípedo ou não. Se o ponto estiver contido na caixa, então o segmento de superfície é um candidato a conter o ponto selecionado.

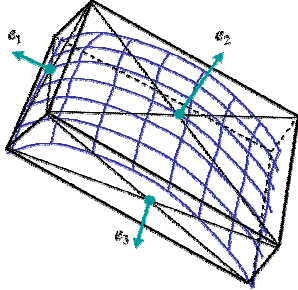
Após determinar o Patch, ou segmento de superfície, que possivelmente contém o ponto, podemos computar os parâmetros do ponto  $P$  sobre o segmento de superfície determinado. Para esse processo, abordamos dois métodos: o primeiro baseado no método iterativo de Newton e o segundo método de partição baseado em bissecção.

### 3.1. Caixa orientada envolvente

Uma caixa envolvente adaptada a um segmento de superfície  $S$  pode ser determinada, a partir da superfície do segmento, em três etapas:

1. determinação do referencial
2. cálculo das dimensões
3. definição da caixa

Na determinação do referencial definimos os eixos principais  $e_1, e_2$  e  $e_3$  que definem a orientação da caixa, um paralelepípedo que envolve a superfície. Na etapa de cálculo de dimensões, computamos as dimensões reais da caixa projetando o segmento de superfície  $S$  sobre cada eixo principal. Este paralelepípedo, por construção, é o de menor volume que contém este segmento da superfície. Finalmente, tendo os eixos, e as dimensões, e a definição da caixa, fixamos os vértices e centróide da caixa. A Figura mostra um segmento de superfície envolvido por uma caixa orientada.



**Figura 3: Caixa orientada envolvendo um segmento de superfície.**

Seja

$$S : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, s) \rightarrow S(r, s)$$

uma parametrização da superfície em estudo, e também  $\rho_1 = \{r_i \in I / a = r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_l = b\}$  e  $\rho_2 = \{s_i \in J / c = s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_c = d\}$  partições dos intervalos  $I = [a, b]$  e  $J = [c, d]$ , respectivamente. O conjunto imagem  $S(\rho_1 \times \rho_2)$  da malha  $\rho_1 \times \rho_2$  é formada por  $n = l \times c$  pontos  $S(r_i, s_j)$  na superfície. Se

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} = S(\rho_1 \times \rho_2)$  e  $P_k = (x_k, y_k, z_k)$ , então a matriz de covariância  $COV = A^T A$  é obtido segundo a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} & z_1 - \bar{z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - \bar{x} & y_n - \bar{y} & z_n - \bar{z} \end{pmatrix};$$

onde  $c = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i, y_i, z_i)$  é o centróide de  $P$ .

**Determinação do referencial:** A matriz simétrica  $COV$  determina 3 auto-vetores ortonormais

$e_1, e_2$  e  $e_3$ , os quais definem um novo referencial  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  com origem no centróide  $c$ .

**Cálculo das dimensões:** Se  $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$  são as coordenadas de  $P_k$  no novo referencial, então as dimensões do paralelepípedo são  $a, b$  e  $c$ ; onde:

$$a = a^+ - a^-, \quad b = b^+ - b^- \quad \text{e} \quad c = c^+ - c^-; \quad \text{sendo:}$$

$$a^+ = \max_{1 \leq k \leq n} \tilde{x}_k, \quad \text{e} \quad a^- = \min_{1 \leq k \leq n} \tilde{x}_k \quad \text{analogamente}$$

$$b^+ = \max_{1 \leq k \leq n} \tilde{y}_k \quad \text{e} \quad b^- = \min_{1 \leq k \leq n} \tilde{y}_k; \quad \text{e por ultimo}$$

$$c^+ = \max_{1 \leq k \leq n} \tilde{z}_k \quad \text{e} \quad c^- = \min_{1 \leq k \leq n} \tilde{z}_k.$$

**Definição da caixa:** A caixa orientada envolvente é o paralelepípedo que contém a superfície, ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^- \leq \tilde{x} \leq a^+ \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) / b^- \leq \tilde{y} \leq b^+ \\ c^- \leq \tilde{z} \leq c^+ \end{array} \right\}$$

### 3.2. Detecção do Ponto na Superfície

Já sabendo que um ponto pertence à superfície, ou é considerado como parte dela, visto que está muito próximo, é necessário descobrir os parâmetros que o geram. Ou seja, se  $P = (x, y, z)$  é de fato um ponto exatamente sobre a superfície  $S(r, s)$ , então existem parâmetros  $r_p$  e  $s_p$  tal que  $P = S(r_p, s_p)$ . Pelo fato de que  $P$  pode não estar exatamente sobre a superfície  $S$  é necessário fazer uma aproximação projetando o ponto  $P$  sobre a superfície  $S$ . Os parâmetros  $r_p$  e  $s_p$  serão determinados por meio de iterações, avaliando em cada uma delas a distância entre o ponto  $P$  e o ponto  $S(r_i, s_i)$ , onde  $S(r_i, s_i)$  se aproxima de  $P$ .

Os valores de  $r_i$  e  $s_i$  são obtidos em cada iteração, visto que devem convergir para os parâmetros  $r_p$  e  $s_p$ , onde a distância de  $P$  à  $S(r_p, s_p)$  é mínima. Testa-se a cada iteração se a distância entre o ponto  $P$  e o ponto  $S(r_i, s_i)$  é menor que um valor de tolerância. Este fato ocorre quando  $P$  for perpendicular a Superfície  $S$  no ponto  $S(r_i, s_i)$ . No momento em que este fato ocorrer  $r_p$  e  $s_p$  assumem os valores de  $r_i$  e  $s_i$  respectivamente.

Para obter-se a perpendicularidade apresentamos dois métodos. O primeiro é baseado no Método Iterativo de Newton, onde precisamos obter os zeros de uma função de duas variáveis. A primeira variável é o produto interno entre o vetor da derivada parcial da função  $S$  em relação à  $r$  no ponto  $S(r_i, s_i)$  com o vetor  $(P - S(r_i, s_i))$ , analogamente a segunda é o produto interno entre o vetor da derivada parcial da

função  $S$  no ponto  $S(r_i, s_i)$  em relação à  $s$  com o mesmo vetor. O segundo Método consiste em dividir o domínio em quatro quadrantes e descobrir qual deles possuirá a melhor projeção do ponto  $P$ . Esta divisão em quadrantes é feita sucessivamente até encontrar parâmetros que sejam razoáveis para representar  $P$  na superfície  $S$ .

O Modelo de teste de Pertinência de um Ponto numa Superfície Via Método Iterativo de Newton é uma alternativa, porém este método nem sempre converge caso a escolha dos parâmetros iniciais não seja adequada. O Modelo de teste de Pertinência de um Ponto numa Superfície Via Subdivisão Quaternária é um método que sempre irá convergir, caso tenha convergência, pois é baseado no princípio da bissecção (partição binária em caso de segmentos de reta). Como para o caso das superfícies o domínio é um segmento de um plano então é realizada uma partição quaternária sem precisar usar o método iterativo de Newton.

### 3.2.1. Teste de pertinência de um ponto numa superfície via método iterativo de Newton

Para que  $P$  seja perpendicular ao plano  $\pi$  tangente a  $S(r_i, s_i)$  o vetor  $(P - S(r_i, s_i))$  deve ser perpendicular aos vetores das derivadas parciais da função em relação a  $r$  e a  $s$  simultaneamente. Vale lembrar que quando dois vetores são perpendiculares então o produto interno entre eles vale zero [5]. Seja

$$d_1 = \left\langle \frac{\partial S(r_i, s_i)}{\partial r}, (P - S(r_i, s_i)) \right\rangle \text{ e}$$

$$d_2 = \left\langle \frac{\partial S(r_i, s_i)}{\partial s}, (P - S(r_i, s_i)) \right\rangle ,$$

buscaremos encontrar um zero para a função  $d(d_1, d_2)$ . Para isso utilizaremos o método iterativo de Newton. Como este é um método numérico iremos determinar os parâmetros  $r_i, s_i$  de forma que  $d_1$  e  $d_2$  seja menor que uma tolerância  $\varepsilon$  dada.

Sabendo que dada uma função  $f(x)$  com apenas uma variável real pode se obter uma aproximação do zero desta função utilizando o Método Iterativo de Newton [6]. Para isto:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

após determinar um valor para  $x_n$  em cada iteração verificar se  $|f(x_n)| < \varepsilon$ , caso isto ocorra podemos dizer que  $x_n$  é o zero de  $f$ .

Em nosso caso queremos saber o zero da função  $d(d_1, d_2)$ . Esta é uma função de duas variáveis,

diferente da apresentada acima, porém a fórmula é semelhante:

$$\begin{pmatrix} r_i \\ s_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ s_{i-1} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial r} & \frac{\partial d_1}{\partial s} \\ \frac{\partial d_2}{\partial r} & \frac{\partial d_2}{\partial s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_1(r_{i-1}, s_{i-1}) \\ d_2(r_{i-1}, s_{i-1}) \end{pmatrix}$$

A cada iteração testa-se os parâmetros  $r_i$  e  $s_i$  das funções  $d_1$  e  $d_2$  e verifica se  $|d_1(r_i, s_i)| < \varepsilon$  e  $|d_2(r_i, s_i)| < \varepsilon$  simultaneamente. Quando isso ocorrer diz-se que  $S(r_i, s_i)$  é a projeção de  $P$  na superfície  $S$ . O método de Newton serve para achar a projeção do ponto  $P$  sobre a superfície  $S$ . Anteriormente tomamos como hipótese que  $P$  era um ponto considerado como parte da superfície, ou seja, bem próximo. Dado um ponto  $P$  qualquer após reconhecer sua projeção sobre a superfície pelo método de Newton, deve-se calcular a distância entre  $P$  e  $S(r_i, s_i)$  e verificar se esta distância é menor que uma tolerância dada. Caso Isso ocorra podemos afirmar que  $P$  pertence à superfície.

### 3.2.2. Teste de pertinência de um ponto numa superfície via subdivisão Quaternária

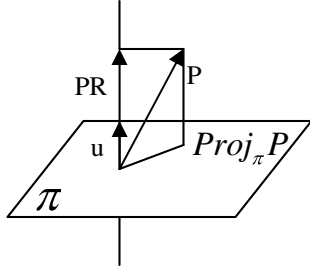
Analogamente ao processo de reconhecimento se o ponto pertence à superfície via o Método Iterativo de Newton neste nosso processo também precisamos determinar o valor dos parâmetros  $r_p$  e  $s_p$  tal que  $S(r_p, s_p)$  seja a projeção do ponto  $P$  sobre a superfície.

Utilizaremos, semelhante a Newton, um Método iterativo para determinar a projeção de  $P$  em  $S$ . Para  $i=1$  tem-se que  $r_i = (r_{min} + r_{max})/2$  e  $s_i = (s_{min} + s_{max})/2$ . Neste momento calcula-se o vetor  $u$  normal e unitário à  $S(r_i, s_i)$  onde  $u = N / \|N\|$  sendo

$$N = \frac{\partial S(r_i, s_i)}{\partial r} \times \frac{\partial S(r_i, s_i)}{\partial s}$$

e a projeção de  $P$  sobre a reta determinada por  $u$ . Esta projeção é dada por  $PR = \langle P - S(r_i, s_i), u \rangle u$ . Se a distância de  $P$  à  $PR$  for menor do que uma tolerância  $\varepsilon$  então  $r_i$  e  $s_i$  podem ser considerados os parâmetros da projeção de  $P$  no plano  $\pi$  tangente a superfície  $S$  no ponto  $S(r_i, s_i)$ . Esta projeção, como mostrada na Figura 4, é dada por:

$$Proj_{\pi} P = (P - S(r_i, s_i)) - PR .$$



**Figura 4: Projeção de um vetor sobre um plano.**

Este plano tangente é obtido pelos vetores  $v_1 = \frac{\partial S(r_i, s_i)}{\partial r}$  e  $v_2 = \frac{\partial S(r_i, s_i)}{\partial s}$

onde  $v_1$  e  $v_2$  são tangentes a superfície  $S$  no ponto  $S(r_i, s_i)$ . O problema inicial é descobrir os parâmetros  $r_p$  e  $s_p$  tal que  $S(r_p, s_p)$  seja a melhor projeção do ponto  $P$  na superfície  $S$ . Os primeiros parâmetros  $r_i$  e  $s_i$  com  $i=1$  a serem considerados são:

$$r_i = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} \text{ e } s_i = \frac{s_{\min} + s_{\max}}{2}$$

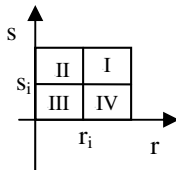
Caso este par não seja satisfatório subdividiremos o domínio em quatro quadrantes tendo como origem  $(r_i, s_i)$ . Devemos descobrir em qual quadrante podemos obter a melhor projeção do ponto  $P$ . Sendo, tanto a superfície  $S$ , como o plano  $\pi$ , imagens deste domínio citado, podemos dividi-los também em quatro quadrantes, baseado na mesma divisão feita no domínio. Assim, isso assegura que a projeção de  $P$  no Plano  $\pi$  está no mesmo quadrante que na superfície  $S$ , pois os parâmetros da projeção de  $P$  no plano  $\pi$  serão os parâmetros adotados para obter a projeção de  $P$  em  $S$ . As coordenadas de um ponto  $A = (x_\pi, y_\pi, z_\pi)$  do plano  $\pi$  são obtidos resolvendo o seguinte sistema linear:

$$A = P + a v_1 + b v_2$$

Os sinais de  $a$  e de  $b$  determinam o quadrante do domínio em que a projeção do ponto  $A$  se localiza:

- Se  $a > 0$  e  $b > a \Rightarrow A \in I$
- Se  $a < 0$  e  $b > a \Rightarrow A \in II$
- Se  $a < 0$  e  $b < a \Rightarrow A \in III$
- Se  $a > 0$  e  $b < a \Rightarrow A \in IV$

Onde I, II, III e IV são os quadrantes do plano  $\pi$ , em torno de  $P$ , tal como mostra a seguir a figura 5:



**Figura 5: Divisão do domínio em quadrantes**

A questão numérica aqui é: achar parâmetros onde  $|a| < \epsilon$  e  $|b| < \epsilon$ . Enquanto esta condição não for satisfeita, procedemos assim:

$$A \in I \Rightarrow r_{i+1} = r_i + \frac{r_i}{2^i} \text{ e } s_{i+1} = s_i + \frac{s_i}{2^i}$$

$$A \in II \Rightarrow r_{i+1} = r_i - \frac{r_i}{2^i} \text{ e } s_{i+1} = s_i + \frac{s_i}{2^i}$$

$$A \in III \Rightarrow r_{i+1} = r_i - \frac{r_i}{2^i} \text{ e } s_{i+1} = s_i - \frac{s_i}{2^i}$$

$$A \in IV \Rightarrow r_{i+1} = r_i + \frac{r_i}{2^i} \text{ e } s_{i+1} = s_i - \frac{s_i}{2^i}$$

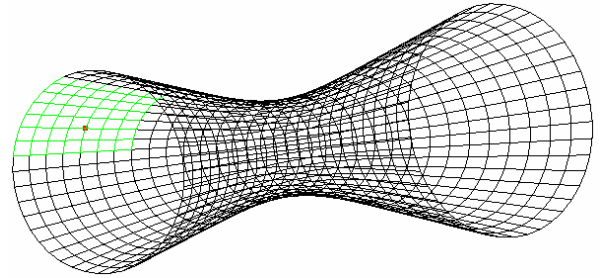
Quando  $|a| < \epsilon$  e  $|b| > \epsilon$  então incrementa-se somente o parâmetro  $s_i$ . Analogamente para  $|a| > \epsilon$  e  $|b| < \epsilon$  incrementa-se somente  $r_i$ .

Quando  $|a| < \epsilon$  e  $|b| < \epsilon$  simultaneamente  $r_p$  e  $s_p$  assumem os valores de  $r_i$  e  $s_i$  respectivamente e então podemos dizer que a projeção de  $P$  na superfície  $S$  é  $S(r_p, s_p)$ . O último teste para afirmar se  $P$  pertence ou não à superfície  $S$  é verificar se  $|P - S(r_p, s_p)| < \epsilon$ . Neste caso considera-se  $P$  um ponto da superfície  $S$ .

### 3.3. Resultados

Neste trabalho estamos priorizando a detecção do ponto na superfície. No caso da manipulação é necessário levar em consideração outros aspectos que não foram ainda levantados. Por isso este pode ser um tema de um outro trabalho. De fato, o interesse aqui é detectar os parâmetros que geram o ponto  $P$  selecionado na superfície  $S$ .

A figura 6 mostra o *patch* de um ponto da superfície:



**Figura 6: Superfície B-Spline com um ponto selecionado (vermelho) e seu respectivo Patch (verde).**

## 4. Conclusão

Neste trabalho foram abordados aspectos matemáticos e computacionais relacionados à modelagem geométrica. Optamos ao trabalhar com modelagem geométrica utilizar as curvas e superfícies B-Spline Cúbicas e Periódicas. Esta opção ocorreu pelo fato deste objeto ser uma spline e possuir um algoritmo (de Boor) robusto e simples para computar os seus pontos. A propriedade de deformação local também foi extremamente relevante na escolha deste objeto. E graças a este último fato este é um objeto que possui grande capacidade de ser manipulado

Mostramos neste trabalho que o modelo matricial para a geração de curvas e superfícies B-Spline é o melhor, pois possui um custo computacional razoavelmente baixo e em sua implementação precisamos somente efetuar um produto de matrizes. Este modelo matricial é possível graças à característica que nas curvas e superfícies B-Spline os pontos de controle tem efeito local.

A distribuição dos pontos de controle determina a forma do objeto. Na modelagem estes pontos são posicionados, mediante as manipulações diretas de um patch, dando assim uma forma complexa a este objeto.

Apresentamos a possibilidade de modificar uma superfície B-Spline sem estar necessariamente deslocando os pontos de controle. Pode-se selecionar com o mouse um ponto da superfície e movê-lo. Para este propósito apresentamos dois modelos que determinam se o ponto selecionado pertence à superfície e, além disso, caso pertença, determina os parâmetros que o gera. Assim sabemos quais são os

pontos de controle que determinam o segmento da superfície e pode-se manipular somente este segmento

Os métodos de Modelagem e Manipulação de objetos apresentados neste trabalho visam à capacidade de manipularmos objetos concretos do mundo real, independente da complexidade de sua forma.

## 5. Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao Laboratório de Ciências Matemáticas da Universidade Estadual do Norte Fluminense que forneceu todo o suporte técnico para que tal trabalho pudesse ser realizado. Agradecemos também ao CNPq que fornece uma bolsa ao aluno Leandro Moraes Valle Cruz.

## 6. Referências

- [1] VELHO, L.; GOMES, J. *Fundamentos da Computação Gráfica*,
- [2] RIVERA, L.A.; CARVALHO, P.C.; VELHO, L. *Interactive Manipulation of Multiresolution Curves*, In Proceedings of 2nd Computer Graphics and Imaging. IASTED, 1999.
- [3] RIVERA, L.A.; CARVALHO, P.C.; VELHO, L. *Modelagem e Manipulação de Objetos de Geometria Complexa*, Technical Report MCC06/99, 1999.
- [4] ROGERS, D.; ADAMS, A., *Mathematical Elements for Computer Graphics*, 1998.
- [5] LIMA, E. L., *Álgebra Linear*, 1980
- [6] RUGGIERO, M. G.; LOPES, V *Cálculo Numérico, Aspectos teóricos e computacionais*, 1996