Probabilidade I

Prova 2023

April 27, 2023

Observações:

- A prova tera duração de 3 horas.
- Questões deverão ser respondidas de maneira matematicamente rigorosa e clara.
- Todos os resultados provados em aula (exceto exercícios) poderão ser utilizados, salvo quando a questão pedir que algum destes seja provado. Nesse caso, todos os resultados anteriores poderão ser utilizados.
- Caso uma questão seja composta de vários itens, cada um poderá ser resolvido independentemente, supondo a validade dos anteriores.
- Estudar a recíproca significa: dar a prova da recíproca se for verdade ou dar um contro-exemple se for falsa.

Exercício I

Seja μ uma probabilidade em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mostrar que se $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu(A) \in \{0,1\}$ então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mu = \delta_x$. Deduzir disso que se uma variável aleatória real X é independente dela mesma então é constante quase certamente.

Seja μ uma tal probabilidade. A função acumulada de ditribuição associada a μ é càd-làg e tem valores em $\{0,1\}$. Eis, se $x_0 := \inf\{x \in \mathbb{R} \ : \ \mu((-\infty, x]) = 1\}$ temos $\mu((-\infty, x]) = \mathbf{1}_{\{x \geqslant x_0\}}$. Em consequência demos $\mu = \delta_{x_0}$ (pois δ_{x_0} tem a mesma função acumulada de distribuição e essa caracterisa uma probabilidade). Se X é independente dela mesmo temos $P(X \in A) = P(X \in A \cap X \in A) = P(X \in A)^2$ eis, $P(X \in A) \in \{0,1\}$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercício II

Seja X uma variável exponencial de parâmetro 1 (com distribuição dada por $P(X \in A) = \int_A e^{-x}\,\mathrm{d}x$ para $A \subset \mathbb{R}_+$).

1. Mostrar que a distribuição da variável $Y = e^{X/2}$ e absolutamente contínua com respeito a Lebesgue e identificar a densidade correspondente.

   Seja φ uma função mensurável não negativa. Temos

   $$E[\varphi(Y)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(e^{x/2}) e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{2}{y^3}\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

   Deduzimos disso que a variável Y tem densidade $p_Y(u) = 2u^{-3}\mathbf{1}_{\{u \geqslant 1\}}$

Sejam $(X_n)_{n \geqslant 1}$ uma sequência de variáveis exponenciais independentes de parâmetro 1.

2. (a) Mostrar que se $\alpha > 1$ então quase certamente existe $n_0(\omega)$ tal que para todo $n \geqslant n_0$, $X_n \leqslant \alpha \log n$.

   Seja A_n o evento $X_n \geqslant \alpha \log n$, temos $P[A_n] = P[X_1 > \alpha \log n] = n^{-\alpha}$. Se $\alpha > 1$ temos $\sum_{n \geqslant 1} P(A_n) < \infty$ e a conclusão vem do Lemma de Borel-Cantelli (primeiro sentido): quase certamente somente um numero finito de A_n occorem.

   (b) Mostrar que quase certamente, temos $X_n \geqslant \log n$ infinito de valores de n.

   Seja B_n o evento $X_n \leqslant \log n$, temos $P[B_n] = P[X_1 \geqslant \log n] = n^{-1}$. Temos $\sum_{n \geqslant 1} P(B_n) = \infty$. Como os eventos B_n são independentes (isso segue da indepedência das variáveis X_n), a conclusão segue do Lemma de Borel-Cantelli (segundo sentido).

   (c) Deduzir que $\limsup_{n \to \infty} \frac{X_n}{\log n} = 1$ quase certamente.

   O item 3 com $\beta = 1$, implica que $\#\{ n \geqslant 1 \ : \ X_n \geqslant \log n \} = \infty$ e então que $\limsup_{n \to \infty} \frac{X_n}{\log n} \geqslant 1$. Pelo item 2 temos $\limsup_{n \to \infty} \frac{X_n}{\log n} \leqslant \alpha$ para todo $\alpha > 1$ o que permite concluir.

3. Mostrar que quase certamente $\limsup_{n \to \infty} \frac{X_n - \log n}{\log \log n} = 1$.

   Reusamos o mesmo racionino com os eventos $A_n = \{X_n \geqslant \log n + \alpha \log \log n\}$ com $\alpha > 1$ e $B_n = \{X_n \geqslant \log n + \log \log n\}$. Usando Borel Cantelli, obtemos que quase certamente A_n acontece somente um numero finito de vezes enquanto B_n acontece infinitas vezes quase certamene. Isso traz a conclusão desejada.

Exercício III

Consideramos $(X_n)_{n \geqslant 1}$ uma sequência de variáveis independentes com valores em $\{-1, 1\}$ e distribuição dada por $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = -1) = p$ aonde $p \in (0, 1)$ é um parâmetro. Definimos $Y_n = X_n X_{n+1}$

1. Identificar a distribuição de Y_n.

   Y_n tem valor no conjunto $\{+1, -1\}$ temos

   $$P[Y_n = 1] = P[X_n = X_{n+1}] = P[X_n = X_{n+1} = 1] + P[X_n = X_{n+1} = -1] = p^2 + (1 - p)^2.$$

   e $P[Y_n = -1] = 1 - p^2 - (1 - p)^2 = 2p(1 - p)$. ´

2. Mostrar que as variáveis $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ são independentes se é somente se $p = 1/2$.

   Temos $P[Y_1 = Y_2 = -1] = P[X_1 = X_3 = -X_2] = p^2(p - 1) + p(p - 1)^2 = p(p - 1)$. Se $p \neq 1/2$ temos $p(p - 1) > 2p^2(p - 1)^2 = P[Y_1 = -1]P[Y_2 = -1]$. Então Y_1 e Y_2 não são independente. Se $p = 1/2$ então para $i_1, \ldots, i_n \in \{-1, 1\}$ temos

   $$\begin{aligned} P[Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n] &= P[X_1 = 1, X_2 = i_1, X_3 = i_1 i_2, \ldots, X_{n+1} = i_{n-1} i_n] \\ &+ P[X_1 = -1, X_2 = -i_1, X_3 = -i_1 i_2, \ldots, X_{n+1} = -i_{n-1} i_n] = 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}. \end{aligned} \tag{1}$$

   o que garante que a distribuição de $(Y_1, \ldots, Y_n)$ e uniforme em $\{-1, 1\}^n$ eis é uma medida produto, e as variáveis são indepedentes o que conclui a demostração.

3. Mostrar que em todos os casos temos a seguinte convergência em L^2.

   $$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} = (1 - 2p)^2.$$

   Temos $E[Y_i] = (1 - 2p)^2$ da primeira pergunta. Eis

   $$E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - (1 - 2p)^2 \right)^2 \right] = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathrm{Cov}(Y_i Y_j). \tag{2}$$

Por argumento de agrupamento por bloco Y_i e Y_j são independentes se $|i-j| \geqslant 2$. Eis

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Cov}(Y_i Y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_i) + 2\sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{Cov}(Y_j, Y_{j+1}) = n\mathrm{Var}(Y_1) + 2(n-1)\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) \leqslant 3n-2. \quad (3)$$

aonde na última desigualdade usamos simplesmente o fato que como $|Y_1| \leqslant 1$ temos $\mathrm{Var}(Y_1) \leqslant E[(Y_1)^2] = 1$ e $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) \leqslant \sqrt{\mathrm{Var}(Y_1)\mathrm{Var}(Y_2)} \leqslant 1$, e temos

$$E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - (1-2p)^2\right)^2\right] \leqslant \frac{3}{n}.$$

Exercício IV

Seja X uma variável aleatória real e Φ_X a sua função característica.

1. Mostrar que se $X \in L^1$ então $\xi \mapsto \Phi_X(\xi)$ é C^1.

   Como consequência to teorema de convergência dominada um a função $t \mapsto E[f(\omega, t)]$ definida para $t \in I$ (I intervalo aberto) é bem definida é contiuamente diferenciável em todo $t \in I$ se $f(\omega, t)$ e integrável alguma $t_0 \in I$ e se para todo ω, f é diferenciável em t e $|f'(\omega, t)| \leqslant h(\omega)$ para todo $t \in I$ aonde h é integrável. Aplicamos este resultado a $e^{i\xi X}$ (aonde ξ tem o papel da variável t) e $I = \mathbb{R}$, temos $|\partial_\xi(e^{\xi X})| = |X|$ eis podemos aplicar o resultado.

2. Mostrar que X tem distribuição simétrica $(\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P[X \in A] = P[-X \in A])$ se e somente se $\Phi_X(\xi) \in \mathbb{R}$ for every $\xi \in \mathbb{R}$.

   Se X e $-X$ tem a mesma distribuição então

   $$E[e^{i\xi X}] = E[e^{-i\xi X}]$$

   e em consequência $E[e^{i\xi X}] = E[\cos(\xi X)] \in \mathbb{R}$. Para recíproca, veja que se $\Phi_{-X}(\xi) = \Phi_X(-\xi) = \overline{\Phi_X(\xi)}$ (usando a notação $\overline{z}$ pelo conjugado complexo). Se $\phi_X(\xi) \in \mathbb{R}$ para todo ξ então $\Phi_X = \Phi_{-X}$ e podemos concluir que $P_X = P_{-X}$ pela injectividade da transformada de Fourier.

3. Mostrar que se $(\xi_i)_{i=1}^n$ são números reais fixos, então a matriz $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definida por

   $$M(i,j) = \Phi_X(\xi_i - \xi_j)$$

   é Hermitiana, definida positiva. (uma matriz $n \times n$ é Hermitiana M se $M(i,j) = \overline{M}(i,j)$ para todo i, j. É definida positiva se para todo vetor $u \in \mathbb{C}^n$ ${}^t\overline{u}Mu \geqslant 0$.)

   Temos $\Phi_X(\xi_j - \xi_i) = E[e^{(\xi_j - \xi_i)X}] = E[\overline{e^{(\xi_i - \xi_j)X}}] = \overline{\Phi_X(\xi_j - \xi_i)}$. Agora se $u = (u_1, \dots, u_n)$ temos

   $$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{u}_i u_j \Phi_X(\xi_i - \xi_j) = E\left[\sum_{i,j=1}^{n} \overline{u}_i u_j e^{(\xi_i - \xi_j)X}\right] = E\left[|\sum_{i=1}^{n} u_j e^{-\xi_i X}|^2\right] \geqslant 0.$$

4. Mostrar que se $(\theta_i)_{i=1}^n$ são números reais distintos a matriz de $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definida por $N(i,j) = \cos(\theta_i - \theta_j)$ é definida positiva.

   E só observar que se X é uma variável simétrica tal que $P[X = 1] = P[X = -1] = \frac{1}{2}$ então $\Phi_X(\xi) = \cos(\xi)$ é aplicar o resultado da pergunta anterior.