Probabilidade II

Liste de Cadeia de Markov

8 de novembro de 2017

Observações:

- Questões deverão ser respondidas de maneira matematicamente rigorosa e clara.
- Todos os resultados provados em aula poderão ser utilizados.
- Caso uma questão seja composta de vários itens, cada um poderá ser resolvido independentemente, supondo a validade dos anteriores.
- As listas poderão ser entregas ate dia 16 de novembro ate 17h00.

1 Cadeias periódicas

Seja $(X_n)_{n\geqslant 0}$ uma cadeia de Markov recorrente irredutível recorrente positiva com matriz de transição Q , cujo período d não e igual a um. Seja μ a probabilidade invariante associada. Fixamos $x \in E$. Definimos para $i = 0, \ldots, d-1$

$$E_i := \{y \in E : \exists k \geqslant 0,\ Q^{dk+i}(x,y) > 0\}.$$

(1) Mostrar:

  (A) para todos i, $E_i \neq \emptyset$,

  (B) $\bigcup_{i=0}^{d-1} E_i = E$,

  (C) $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

(2) Mostrar que para todo i e y temos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x[X_{nd+i} = y] = d\mu(y)\mathbf{1}_{\{y\in E_i\}}.$$

2 Cadeia esqueleta

Seja $(X_n)_{n\geqslant 0}$ uma cadeia de Markov irredutível em E ($\#E > 1$) com matriz de transição Q e condição initial x, $x \in E$. Definimos

$$T_1 := \min\{n \geqslant 0\ :\ X_n \neq X_0\}$$

(1) Mostrar que T_1 é um tempo de parada. Calcular a distribuição de T_1 é de X_{T_1}.

Definimos a sequência $(T_n)_{n\geqslant 0}$ do jeito seguinte, $T_0 := 0$ e por recorrência para $n \geqslant 0$

$$T_{n+1} := \min\{m \geqslant T_n \ : \ X_m \neq X_{T_n}\}$$

(2) Mostrar que T_n é um tempo de parada finito para todo n.

(3) Mostrar que $(Y_n)_{n\geqslant 0} := (X_{T_n})_{n\geqslant 0}$ é uma cadeia de Markov, e especificar a matriz de transição.

(4) Mostrar que se a medida μ é estável por X então a medida $\widetilde{\mu}$ definida por $\widetilde{\mu}(y) = (1 - Q(x,x))\widetilde{\mu}(x)$ é estável.

(5) Mostrar que $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ é recorrente positiva se $(X_n)_{n\geqslant 0}$ é recorrente positiva, e fornecer um contro-exemplo pela recíproca.

3 Solve real life problems using Markov chains

Zé é aluno do IMPA e mora na Pacheco Leão. Cada manhã decide de ir estudar ao IMPA se tiver sol ou se tiver um guarda-chuva em casa, e de ficar em casa se não tiver. Cada tarde, se tiver ido estudar, ele volta sem guarda chuva se der sol e com guarda chuva se chover e tiver um a disposição. Se não tiver, ele prefira voltar em casa molhado do que passar a noite no IMPA.

Assumimos que chove de jeito independente cada turno (manhã ou noite) com probabilidade $p \in (0,1)$. O corpo docente fala pelo Zé que pode faltar no máximo um dia por semana em media. Calcular o numero de guarda chuva que o Zé precisa ter a disposição para cumprir essa meta ao longo prazo.

4 Renewal Theorem

Seja $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ uma sequência de variáveis inteiras positivas independentes e com mesma distribuição μ. Supormos que que

$$\mathrm{MDC}\{x \ : \ \mu(x) > 0\} = 1.$$

e que $\sum_{x\geqslant 1} x\mu(x) = m < \infty$.

Definimos X_n o processo de overshoot do jeito seguinte:

$$X_n := \inf\{m \geqslant n \ : \ \exists k \geqslant 0,\ Y_1 + \cdots + Y_k = m\} - n.$$

(1) Mostrar que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ e uma cadeia de Markov e exibir a matriz de transição associada.

(2) Mostrar que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ é irredutível, e aperiódica.

(3) Mostrar que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ é recorrente positiva e deduzir que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\exists k \geqslant 1,\ Y_1 + \cdots + Y_k = m] = \frac{1}{m}.$$

5 Passeio inomogêneo em $\mathbb{Z}$

Definimos $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ a cadeia de Markov em $\mathbb{Z}$ associada a matriz de transição Q,

$$\begin{cases} Q(x, x+1) = p_x, \\ Q(x, x-1) = q_x = 1 - p_x. \end{cases}$$

onde $(p_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência de números reais em $(0, 1)$

(1) Exhibir uma medida reversível para X.

(2) Dar uma condição necessária e suficiente para X ser recorrente positiva.

(3) No caso onde p_x e dado por

$$p_x = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{a}{x} \text{ if } |x| \geqslant 4a, \\ \frac{1}{2} \text{ if } |x| \leqslant 4a. \end{cases}$$

com $a > 0$ identificar os valores de a tais que a cadeia é recorrente positiva.

6 Condição de Kolmogorov para reversibilidade

Seja E enumerável e Q uma matriz de transição irredutível em E tal que

$$Q(x, y) > 0 \;\Leftrightarrow\; Q(y, x) > 0.$$

Consideramos o grafo cujo conjunto de arestas e dado por

$$A := \{\{x, y\} \;:\; Q(x, y) > 0\}.$$

Uma sequência $(x_0, x_1, \ldots, x_n = x_0)$ é chamada ciclo se $\{x_i, x_{i-1}\}$ pertencia a A para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Mostrar que a a cadeia tem uma única medida reversível se e somente se para todo ciclo em A

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = 1.$$

7 Problema de Dirichlet discreto

Seja E enumerável e Q uma matriz de transição em E, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ a cadeia de Markov associada. Seja F um subconjunto de E e h uma função positiva limitada em E. Definimos $T_F := \inf\{n \geqslant 0 \;:\; x \in F\}$, e

$$f(x) := \mathbb{E}_x \left[f(h_{T_F}) \mathbf{1}_{T_F < \infty} \right].$$

(1) Mostrar que f satisfaz

$$\begin{cases} Qf(x) = f(x), & \forall x \in F^{\complement}, \\ f(x) = h(x), & \forall x \in F. \end{cases}$$

onde $Qf(x) := \sum_{y\in E} Q(x, y) f(y)$.

(2) Seja g uma outra solução positiva do sistema, mostrar que para todo n, $g(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{n\wedge T_F})]$.

(3) Deduzir que f é a menor solução positiva ao problema.

(4) Mostrar que f é a única solução limitada ao problema se e somente se $T_F < \infty$ quase certamente.