Probabilidade II

Lista Movimento Browniano

16 de novembro de 2017

Observações:

- Questões deverão ser respondidas de maneira matematicamente rigorosa e clara.
- Todos os resultados provados em aula poderão ser utilizados.
- Caso uma questão seja composta de vários itens, cada um poderá ser resolvido independentemente, supondo a validade dos anteriores.
- As listas poderão ser entregas ate dia 5 de dezembro ate 23h59.

Em todos exercícios $(B_t)_{t\geqslant 0}$ é um movimento Browniano de dimensão 1 saindo de zero definido no espaço canônico e $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ é a filtração definida por $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, s \in [0,t])$. Definimos também $\mathcal{F}_\infty := \sigma(B_s, s \in \mathbb{R}_+)$.

1 Umas observações sobre movimento Browniano

1.1 Extrema locais

Mostrar que para qualquer $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

$$\mathbb{P}_0(\sup_{s\in[t_1,t_2]} B_s = \sup_{s\in[t_3,t_4]} B_s) = 0.$$

Deduzir que todos maxima locais do movimento Browniano tem valores distintos (O movimento Brownian atinge um maximum local em $t > 0$, se exise $\varepsilon > 0$ tal que $\max_{s\in[t-\varepsilon,t+\varepsilon]} B_s = B_t$).

1.2 Inversão do tempo do movimento Browniano

Mostrar que $\widetilde{B}_t := tB_{1/t}$ é um movimento Browniano.

DICA: Mostrar que quase certamente $\sup_{t\in[0,n]} |B_t| \leqslant n^{3/4}$ *para* n *grande suficiente.*

2 (Ir)regularidade do Movimento Browniano

Seja $(B_t)_{t\geqslant 0}$ um movimento Browniano de dimensão 1 saindo de zero.

(1) Mostrar que $\limsup_{t\to 0} t^{-1/2} B_t = \infty$ quase certamente.

(2) Dar uma cota superior (boa) para

$$P(\sup_{s\in[0,t]} |B_s| > \varepsilon t^{1/2} \log|\log t|).$$

valida para t pequeno e usar la para mostrar que quase certamente

$$\lim_{t\to 0} t^{-1/2} |\log\log t|^{-1} B_t = 0.$$

(3) Definimos para $n \geqslant 0$ e $i \in [\![1,\dots,2^n]\!]$

$$S_i^{(n)} := \sup_{s\in[(i-1)2^{-n}, i2^{-n}]} |B_s - B_{(i-1)2^{-n}}|.$$

(i) Mostar que para tudo n grande suficiente

$$P(\exists i \in [\![1,2^n]\!], S_i^{(n)} \geqslant \sqrt{n}2^{-n/2}) \leqslant e^{-n/4}.$$

(ii) Mostrar que quase certamente

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} (\varepsilon|\log\varepsilon|)^{-1/2} \sup_{s,t\in[0,1]\ :|t-s|\leqslant\varepsilon} |B_s - B_t| \leqslant C.$$

para um constante C explícito.

3 Conjunto de zero do Movimento Browniano

(1) Para $s \in \mathbb{R}$ definimos

$$D_s := \inf\{t \geqslant s \ : \ B_t = 0\}.$$

Mostrar que D_s é um tempo de parada, quase certamente finito.

(2) Consideramos a função $\varphi : C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definida por

$$\varphi(w,t) = \mathbf{1}_{\{w(t)=0\}}.$$

Mostrar que é mensurável se $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ e equipado da σ algebra produto $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. *DICA : Mostrar que os conjuntos do tipo*

$$I_{a,b} := \{w \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \ : \ \forall t \in (a,b), w(t) > 0\}$$

$a,b \in \mathbb{R}$ *sao mensuráveis*

(3) Consideramos

$$G := \{\ t \geqslant 0 \ : B_t = 0\}$$

Mostrar que quase certamente G é um conjunto fechado, de medida de Lebesgue zero, e que $\sup G = \infty$.

(3) Mostrar que quase certamente G não tem pontos isolados, no sentido que todo $t \in G$ é limite de uma sequência de elementos em $G\backslash\{t\}$.

DICA: Mostrar primeiro que quase certamente, os D_q, $q \in \mathbb{Q}$ não são pontos isolados em G.

4 Lei do Arcsinus

Definimos

$$D_1 := \inf\{t \geqslant 1 \ : \ B_t = 0\}, \quad E_1 := \sup\{t \leqslant 1 \ : \ B_t = 0\}.$$

(1) Mostrar que E_1 não é um tempo de parada.

(2) Definimos para $t \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$,

$$g(t,x) = \mathbb{P}_0\left[\sup_{s \in [0,t-1]} B_s < |x|\right].$$

Mostrar que $\mathbb{P}_0[D_1 > t] = \mathbb{E}_0[g(B_1)]$.

(3) Sejam X e X' duas variáveis Gaussianas independente de distribuição $\mathcal{N}(0,1)$. Mostrar que

$$D_1 \overset{(d)}{=} 1 + \frac{X^2}{(X')^2}.$$

(4) Mostrar que E_1 tem a mesma distribuição que $(D_1)^{-1}$ e calcular a densidade da distribuição de E_1.