Medida e Integração

Primeira Prova

14 de Outubro

Observações:

- As respostas poderão ser dadas em português ou inglês.
- Questões deverão ser respondidas de maneira matematicamente rigorosa e clara.
- Todos teoremas apresentados nos vídeos poderão ser usados (sem necessidade replicar a demostração), mas com a necessidade de fazer uma referência clara ao resultado.
- Caso um exercício seja composto de vários itens, cada um poderá ser resolvido independentemente, supondo a validade dos anteriores.

Verdadeiro ou Falso

Para cada das afirmações seguinte, dizer se é falsa ou verdadeira e providência uma demonstração ou um contra-exemplo:

(a) Cada aberto não vazio de $\mathbb{R}$ tem medida de Lebesgue positiva.

Se A é aberto então podemos achar um intervalo $[a,b)$ tal que $A \supset [a,b)$ é logo por monotonia $\lambda(A) \geqslant \lambda([a,b)) \geqslant b-a$.

(b) Um conjunto enumerável tem medida de Lebesgue nula.

Temos $\lambda(\{x\}) = \lim_{n\to 0} \lambda([x, x+1/n)) = 0$. Agora se A é enumerável então $\lambda(A) = \sum_{x\in A} \lambda(\{x\}) = 0$.

(c) Se uma sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integráveis, satisfazendo $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 0$ então, $\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}x = 0$.

É falso, $f_n = n^{-1}\mathbf{1}_{[-n,n]}$ fornece um contra-exemplo, pois $\int f_n \,\mathrm{d}x = 2$ para qualquer n.

(d) Se μ for uma medida tal que $\mu(\Omega) < \infty$ então qualquer função mensurável limitada $\Omega \to \mathbb{R}$ é integrável.

Temos $\int |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int \|f\|_\infty \,\mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_\infty \mu(\Omega)$.

(e) Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra em Ω, e μ uma medida tal que $\mathcal{F}$ é μ-completa. Se ν for uma medida em $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\nu \ll \mu$, então $\mathcal{F}$ é ν-completa.

Podemos considerar $\Omega = \{0,1\}$, $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mu(\Omega) = 1$, $\mu(\varnothing) = \nu(\varnothing) = \nu(\Omega) = 0$. Neste caso $\mathcal{F}$ é μ completa mas não é ν completa (o conjunto $\{1\}$ é ν-negligível e não pertencia a $\mathcal{F}$).

(f) Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não-negativa e integrável, então $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Consideramos f definida do jeito seguinte: Para $z \in \mathbb{Z}$, $f(z) = 1$, e $f(z+x) = (1 - 2^{|z|+1}|x|)_+$ para $x \in [-1/2 + 1/2)$. Usando monotonicidade, temos

$$\int |f| \, \mathrm{d}x = \sum_{z\in\mathbb{Z}} \int_{[z-1/2,z+1/2)} |f| \, \mathrm{d}x \leqslant \int_{[z-1/2,z+1/2)} \mathbf{1}_{[z-2^{-|z|-1}, z+2^{-|z|-1}]} \, \mathrm{d}z = \sum_{z\in\mathbb{Z}} 2^{-|z|} = 3.$$

Assim f é integrável, mais $\limsup_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Exercício: Medida imagem

Sejam $(F, \mathcal{F})$ and $(G, \mathcal{G})$ dois espaços mensuráveis. Consideramos $f : F \to G$ uma aplicação mensurável, ou seja, tal que $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \mathcal{G}$ aonde $f^{-1}(A) := \{x \in F : f(x) \in A\}$. Seja $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, uma medida em F e $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

1. Mostrar que se φ é mensurável então $\varphi \circ f$ também.

   Seja $B \in \bar{\mathcal{B}}$. Temos $(\varphi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\left(\varphi^{-1}(B)\right)$. Como φ é mensurável $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{G}$, e então como f é mensurável temos $f^{-1}\left(\varphi^{-1}(B)\right) \in \mathcal{F}$.

2. Mostrar que $f_*\mu$ definida em $\mathcal{G}$ por $f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}(A))$, é uma medida em G.

   Como $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ temos $f_*\mu(\varnothing) = 0$. Só falta então verificar σ-aditividade. Como $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ sabemos que dois conjuntos disjuntos tem preimagens disjuntas. Então $f^{-1}(\bigsqcup_{i\geqslant 1} A_i) = \bigsqcup_{i\geqslant 1} f^{-1}(A_i)$ (por que a preimagem da união é a união das preimagens) e podemos concluir usando σ-aditividade de μ.

3. Mostrar que se φ é mensurável então

   $$\int \varphi \, \mathrm{d}\,(f_*\mu) = \int (\varphi \circ f) \, \mathrm{d}\mu$$

   Verificamos primeiro no caso aonde φ é uma função indicadora. Temos para $A \in \mathcal{G}$

   $$\int \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\,(f_*\mu) = f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) = \int \mathbf{1}_{\{x\in f^{-1}(A)\}} \mu(\mathrm{d}x) = \int \mathbf{1}_{\{f(x)\in A\}} \, \mathrm{d}\mu.$$

   Usando linearidade podemos estender a relação a funções simples, pois usando convergência monótona, a φ positiva qualquer.

Reencontro com propriedades clássica da integração

(A) Integral e derivada

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continua.

1. Sejam $a < b$ dois reais. Justificar que $f\mathbf{1}_{[a,b]}$ é integrável para medida de Lebesgue em $[0, 1)$.

   A função f sendo contínua ela é mensurável, $f\mathbf{1}_{[a,b]}$ é então mensurável como produto de funções mensuráveis. Por continuidade f é limitada em $[a, b]$. Usando monotonicidade e linearidade e temos

   $$\int |f\mathbf{1}_{[a,b]}| \, \mathrm{d}x \leqslant (\max_{y\in[a,b]} |f(y)|) \int \mathbf{1}_{[a,b]} \, \mathrm{d}x \leqslant (b-a)(\max_{y\in[a,b]} |f(y)|) < \infty.$$

Definimos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \begin{cases} \int f(x)\mathbf{1}_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x & \text{se } a < b, \\ -\int f(x)\mathbf{1}_{[b,a]}(x)\,\mathrm{d}x & \text{se } a > b, \\ 0 & \text{se } a = b. \end{cases} \tag{1}$$

Também definimos $F(t) := \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Mostrar que para a, b e c em $\mathbb{R}$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Assumimos que $a < b < c$. Neste caso o resultado acima segue imediatamente da linearidade da integral (e do fato que pontos isolados tem medida nula). Vamos agora mostrar que o resultado vale também para qualquer permutação de a, b e c. Usando o fato que a inversão das extremidade da integral equivale a uma troca de sinal temos também (invertindo as extremidade de uma das integrais na direita e passando ela para esqueirda)

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

As três outras permutações podem ser obtidas invertindo as extremidade das integrais nas três identidade que já obtemos.

3. Mostrar que F é continua, diferentiável em t para todo $t \in \mathbb{R}$ e identificar o valor de F'.

Vamos mostrar que $\lim_{\delta\to 0} \delta^{-1}[F(t+\delta) - F(t)] = f(t)$ o que implica que F e continua, diferenciável e que $F'(t) = f(t)$. Vamos tratar primeiro o caso $\delta > 0$, temos por linearidade da integral $F(t+\delta) - F(t) = \int_t^{t+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x$. Usando a continuidade de f, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0(\varepsilon) > 0$ tal que para $\delta \in (0, \delta_0)$

$$f(t) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(t) + \varepsilon.$$

Usando monotonia da integral deduzimos que

$$\delta(f(t) + \varepsilon) \leqslant \int_t^{t+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \delta(f(t) + \varepsilon),$$

e então que $|\delta^{-1}[F(t+\delta) - F(t)] - f(t)| \leqslant \varepsilon$. Para $\delta < 0$, escrevendo $\delta' = -\delta$, temos $F(t) - F(t-\delta') = \int_{t-\delta'}^t f(x)\,\mathrm{d}x$, e podemos concluir usando o mesmo raciocino que $|(\delta')^{-1}[F(t) - F(t-\delta')] - f(t)| \leqslant \varepsilon$ se δ' for pequeno suficiente. Acabamos demonstrando que $\lim_{\delta\to 0} \delta^{-1}[F(t+\delta) - F(t)] = f(t)$.

4. Seja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e diferenciável em todo ponto, e tal que $G'(t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostrar que

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Se $G'(t) = f(t)$ então $F - G$ tem derivada identicamente nula. Usando o teorema do valor medio, isso implica que $F - G$ é constante em $\mathbb{R}$. Então usando a resposta na pergunta 2,

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(B) Integral de Riemann

Seja $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos para $n \geqslant 0$, $k \in [\![1, 2^n]\!]$, $I_k^n = [(k-1)2^{-n}, k2^{-n})$. Assumimos que f é Riemann integrável o que é equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\sup_{x \in I_k^n} f(x) - \inf_{y \in I_k^n} f(y) \right) = 0. \tag{2}$$

Definimos $g_n, h_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ da forma seguinte.

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \sup_{y \in I_k^n} f(y) \quad \text{if} \quad x \in I_k^n, \\ h_n(x) &= \inf_{y \in I_k^n} f(y) \quad \text{if} \quad x \in I_k^n, \end{aligned} \tag{3}$$

1. Mostrar que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $(g_n(x))_{n\geqslant 1}$ e decrescente e que $(h_n(x))_{n\geqslant 0}$ é crescente.

   Seja x fixado, definimos $I^n(x) = [2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor, 2^{-n}(\lfloor 2^n x + 1\rfloor])$. Temos

   $$g_n(x) := \sup_{y \in I^n(x)} f(y) \text{ e } \quad h_n(x) := \inf_{y \in I^n(x)} f(y).$$

   Para mostrar as monotonicidades desejadas, precisamos somente mostrar que $I_{n+1}(x) \subset I_n(x)$, o que é uma consequência de

   $$2\lfloor 2^n x\rfloor \leqslant \lfloor 2^{n+1}x\rfloor < 2\lfloor 2^n x\rfloor + 2.$$

   (que vale por que $2\lfloor 2^n x\rfloor \leqslant 2^{n+1}x < 2\lfloor 2^n x\rfloor + 2$ e que as quantidades nas extremidades são números inteiros).

2. Denotamos por $g(x)$ e $h(x)$ os limites respectívos de $g_n(x)$ e $h_n(x)$. Mostrar que g e h são Borel mensuráveis e integráveis.

   As funções g e h são limites de funções simples que são Borel mensuráveis (somas de indicadoras dos conjuntos I_k^n que são Borel mensuráveis).

3. Mostrar que $\int_{[0,1)} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1)} h(x)\,\mathrm{d}x$.

   Usando convergência dominada ($|g_n|$ e $|h_n|$ são limitada por $\sup_{[0,1)} f$), temos que $\int g\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,\mathrm{d}x$ e $\int h\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int h_n\,\mathrm{d}x$. Agora usando a definição da integral para funções simples temos

   $$\int g_n\,\mathrm{d}x - \int h_n\,\mathrm{d}x = 2^{-n}\sum_{k=1}^{2^n}\left(\sup_{x\in I_k^n} f(x) - \inf_{y\in I_k^n} f(y)\right).$$

   Pegando o limite para $n \to \infty$ e usando a hipótese, obtemos o resultado desejado.

4. Mostrar que f é Lebesgue mensurável e que

   $$\int_{[0,1)} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}\sum_{k=1}^{2^n}\sup_{x\in I_k^n} f(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}\sum_{k=1}^{2^n}\inf_{y\in I_k^n} f(y).$$

   Assumindo que f é mensurável, temos por definição $h_n \leqslant f \leqslant g_n$ e então passando no limite $h \leqslant f \leqslant g$. Por monotonia $\int h\,\mathrm{d}x \leqslant \int f\,\mathrm{d}x \leqslant \int g\,\mathrm{d}x$, e assim obtemos o resultado desejado. Agora para provar que f é mensurável, é suficiente mostrar que coincide quase sempre com uma função mensurável. Para isso é suficiente mostrar que $\{x \ : \ f(x) \neq h(x)\} \subset \{x \ : h(x) < g(x)\}$ e negligível. Isso segue do fato que $g - h$ é uma função não negativa com integral nula (cf. Pergunta 3 e linearidade da integral).